Table des matières

Listes des symboles **2**

Introduction **3**

1 Préliminaires **5**

1.1 Espace de Hilbert 5

1.2 Espace des opérateurs linéaires bornés 6

1.3 Quelques définitions et propriétés variantes 11

2 Image et rayon numériques **12**

2.1 Image numérique 12

2.2 Rayon numérique 15

3 Inégalités pour un opérateur **18**

3.1 Inégalités générales 18

3.2 Inégalités de puissance 21

3.3 Inégalités en sens inverse 28

4 Inégalités pour deux opétareurs **34**

4.1 Inégalités de base 34

4.2 Inégalités pour un opérateur inversible 37

4.3 Quelques inégalités divers 39

Conclusion **45**

Bibliographie **46**

Listes des symboles

H	Espace de Hilbert complexe.
$\mathcal{L}(H)$	Espace des opérateurs linéaires bornés sur H
$\|A\|$	Norme de A.
$\langle .,. \rangle$	Signe du produit scalaire.
$R(A)$	Image de A.
$\ker(A)$	Noyau de A.
$\mathrm{Re}(A)$	Partie réelle de A.
$\mathrm{Im}(A)$	Partie imaginaire de A.
A^*	Adjoint Hilbertien de A.
$W(A)$	Image numérique de A.
$w(A)$	Rayon numérique de A.
$\sigma\,(A)$	Spectre de A.
$\sigma_a(A)$	Spectre ponctuel approché de A.
$\sigma_p(A)$	Spectre ponctuel de A.
$r\,(A)$	Rayon spectral de A.
$A\|F$	Compression de A sur F.
$\|A\|$	Module de A.
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
$M^\perp$	Complémentaire orthogonal de M.
$\oplus$	Signe de somme directe orthogonale.
$\perp$	Signe d'orthogonalité.
$co(M)$	Enveloppe convexe de M.

Introduction

Soient H un espace de Hilbert complexe et A un opérateur linéaire borné sur H. L'image numérique de A est l'ensemble défini par

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle \, ; x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Le rayon numérique de A est le réel positif défini par

$$w(A) = \sup\{|\lambda| \, ; \lambda \in W(A)\}.$$

L'image numérique est comme le spectre, c'est un sous-ensemble du plan complexe, possède des propriétés géométriques permettent de connaitre quelques caractéristiques de l'opérateur et elle a une relation très importante avec le spectre.
La notion de l'image numérique a été introduite par Otto Toeplitz [28] en 1918. Dans les années 1930, ce concept a vu le début de développement par certains chercheurs.
Les concepts de l'image numérique et le rayon numérique jouent un rôle important dans divers domaines des mathématiques contemporaines, notamment la théorie des opérateurs, la trigonométrie des opérateurs, l'analyse numérique, la dynamique des fluides, etc.
Nous nous intéressons ici aux inégalités du rayon numérique d'un opérateur borné sur un espace de Hilbert. Ce domaine relie la théorie des opérateurs par les inégalités mathématiques qui ont connu une croissance exponentielle au cours des deux dernières décennies.
P. R. Halmos [18] , C. Berger [01] et J. A. R. Holbrook [21] ont été les premiers à publier des articles sur ces inégalités dans les années 1960. En 1970 et 1971 R. Bouldin a donné dans [03] et [04] quelques inégalités pour le produit d'opérateurs. À partir de la fin des années 1980 à nos jours, S. S. Dragomir et F. Kittaneh ont dominé ce domaine en publiant des dizaines d'articles, entre eux on a étudié dans ce travail les travaux [08], [10], [11], [13], [24] et [25].
Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions de base de la théorie des opérateurs et quelques définitions et propriétés variantes qu'on a utiliser dans ce travail.
Au second chapitre nous présentons des notions de base et quelques propriétés de l'image et du rayon numériques, se qui donnent une vue initiative de ces concepts.
Dans le troisième chapitre nous étudions les inégalités du rayon numérique pour un seul opérateur, nous présentons des inégalités générales donées par R. Bouldin [4], S. S. Dragomir [10] et F.

Kittaneh [24] et [25], des inégalités de puissance données par C. Berger [01] et F. Kittaneh [13] et des inégalités en sens inverse données par S. S. Dragomir [08] et [10].
Enfin, le dernier chapitre est consacré à l'étude des inégalités du rayon numérique pour deux opérateurs, nous présentons des inégalités de base données par J. A. R. Holbrook [21] et K.E. Gustafson [17], des inégalités pour un opérateur inversible données par S. S. Dragomir [11] et dans la dernière partie quelques inégalités divers données par S. S. Dragomir [11] et [12].

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espace de Hilbert

On désigne par H espace de Hilbert complexe muni d'un produit scalaire, noté $\langle ., . \rangle$.

Définition 1.1 *Un espace vectoriel complet muni d'un produit scalaire est dit espace de Hilbert.*

Proposition 1.1 *Le produit scalaire $\langle ., . \rangle$ définie une norme sur H, tel que*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \forall x \in H.$$

Proposition 1.2 (*Inégalité de Cauchy-Schwartz*)
Pour tout $x, y \in H$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \, .$$

Théorème 1.1 (*Identité du parallélogramme*)
Pour tout $x, y \in H$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Définition 1.2 (*Orthogonalité*)
Deux vecteurs x et y dans H sont dit orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$, on note $x \perp y$.
Soient M et N, deux parties de H tels que

$$\forall x \in M, \ \forall y \in N, \langle x, y \rangle = 0$$

on dit que M et N sont orthogonaux et on note $M \perp N$.

Définition 1.3 (*Complémentaire orthogonal*)
Le complémentaire orthogonal d'un sous-ensemble $M \subset H$ est défini par

$$M^{\perp} = \{x \in H; \forall y \in M, \langle x, y\rangle = 0\}\,.$$

Définition 1.4 (*Décomposition orthogonale*)
Si F est un sous espace fermé de H, alors $H = F \oplus F^{\perp}$.

(1) *L'expression $H = F \oplus F^{\perp}$ est dite décomposition orthogonale de H.*

(2) *L'égalité $H = F \oplus F^{\perp}$ signifie que tout vecteur x de H s'écrit d'une façon unique de la forme $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^{\perp}$.*

Théorème 1.2 *Si $x, y \in H$ tels que $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$, alors x et y sont linéairement dépendants.*

Définition 1.5 *On définit l'angle α entre deux sous espaces F et G de H par $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et*

$$\cos\alpha = \sup\{|\langle x, y\rangle|\,,\ x \in F,\ y \in G,\ \ \|x\| = \|y\| = 1\}\,.$$

On a

$$\forall (u, v) \in F \times G,\ \ |\langle u, v\rangle| \leq \cos\alpha\,\|u\|\,\|v\|\,.$$

1.2 Espace des opérateurs linéaires bornés

Soient H et K deux espaces de Hilbert.

(1) *$\mathcal{L}(H, K)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires bornés de H dans K, et si $K = H$, on note $\mathcal{L}(H, K) = \mathcal{L}(H)$.*

(2) *Pour $A \in \mathcal{L}(H)$, l'image de A est l'ensemble défini par*

$$R(A) = \{Ax, x \in H\}\,,$$

et le noyau de A est l'ensemble défini par

$$\ker(A) = \{x \in H, Ax = 0\}\,.$$

(3) *On appelle opérateur adjoint de $A \in \mathcal{L}(H)$ l'unique opérateur $A^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que*

$$\forall x, y \in H, \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle.$$

(4) $\overline{R(A^*)} = [\ker(A)]^{\perp}$, où $\overline{R(A^*)}$ désigne l'adhérence de $R(A^*)$.

(5) $\ker(A^*) = (R(A))^{\perp}$.

Définition 1.6 *La norme d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est défini par*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{||x||}.$$

Proposition 1.3 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors*

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ax, y\rangle|, \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

Définition 1.7 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et F un sous espace de H*

(1) *On dit que F est invariant par A si $A(F) \subset F$.*

(2) *On dit que F est réduisant pour A si F et $F^{\perp}$ sont invariants par A.*

Définition 1.8 *Soit F un sous-espace fermé de H. L'application*

$$\begin{aligned} P &: F \oplus F^{\perp} \longrightarrow H \\ x &= x_1 + x_2 \longmapsto x_1 \end{aligned}$$

dite projection orthogonale de H sur F.

Proposition 1.4 *Un opérateur $P \in \mathcal{L}(H)$ est une projection orthogonale si et seulement si*

$$P^2 = P = P^*.$$

Proposition 1.5 *Pour un sous-espace F de H, on appelle compression de $A \in \mathcal{L}(H)$ sur F et on la note $A|F$ la restriction de l'opérateur $P_F A$ sur F, (où P est la projection orthogonale sur F).*

Définition 1.9 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$.*
L'orbite unitaire de A est la classe définie par :

$$U(A) = \{U^*AU, \text{ tel que } U \text{ est un opérateur unitaire de } \mathcal{L}(H)\}.$$

Définition 1.10 *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$.*

On dit que A commute avec B (ou B commute avec A) si $AB = BA$.
On dit que A double commute avec B si $AB = BA$ et *$AB^* = B^*A$.*

Définition 1.11 *Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est dit*

(1) **Auto-adjoint** *(hermitien), si $A = A^*$.*

(2) **Isométrie,** *si* $A^*A = I$.

(3) **Positif**, *s'il est auto-adjoint et* $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ *pour tout* $x \in H$, *on note* $A \geq 0$.

(4) **Unitaire**, si $AA^* = A^*A = I$.

(5) **Normal**, *si* $A^*A = AA^*$.

(6) **Hyponormal**, *si* $A^*A - AA^* \geq 0$.

Théorème 1.3 *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$, *alors*

1. A *est une isométrie si et seulement si* $\|Ax\| = \|x\|$ *pour tout* $x \in H$.
2. A *est normal si et seulement si* $\|A^*x\| = \|Ax\|$ *pour tout* $x \in H$.
3. A *est hyponormal si et seulement si* $\|A^*x\| \leq \|Ax\|$ *pour tout* $x \in H$.

Notation 1.1 *Si* $A, B \in \mathcal{L}(H)$ *deux operateurs positifs tels que* $A - B$ *est positif* $(A - B \geq 0)$, *on écrit* $A \geq B$.

Corollaire 1.1 *Soient* A *et* B *deux opérateurs positifs de* $\mathcal{L}(H)$ *tels que* $BA = AB$. *Alors* BA *est positif.*

Définition 1.12 *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$. *On dit que* $B \in \mathcal{L}(H)$ *est la racine carrée de* A *si* $B^2 = A$.

Théorème 1.4 *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$ *positif. Alors, il existe une unique racine carrée positive de* A *notée* $\sqrt{A}$ *ou* $A^{1/2}$.
De plus, si A *commute avec un opérateur* $T \in \mathcal{L}(H)$, *alors* $\sqrt{A}$ *commute avec* T.

Définition 1.13 *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$. *On appelle module de* A *la racine carrée de* A^*A *et on le note* $|A|$.

Théorème 1.5 (*Théorème de Fuglede* [14])
Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$. *Si* $AB = BA$ *et* B *normal, alors*

$$AB^* = B^*A.$$

Définition 1.14 *Soient* H_1 *et* H_2 *deux espaces de Hilbert. On définit*

$$H_1 \oplus H_2 = \{(x_1, x_2)/\ x_1 \in H_1, x_2 \in H_2\}$$

avec le produit scalaire

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle_{H_1 \oplus H_2} = \langle x_1, y_1\rangle_{H_1} + \langle x_2, y_2\rangle_{H_2}.$$

$H_1 \oplus H_2$ *est un espace de Hilbert appelé somme directe orthogonale de* H_1 *et* H_2.

Définition 1.15 *Soient H_1, H_2, K_1 et K_2 des espaces de Hilbert. Posons*

$$H = H_1 \oplus H_2 \text{ et } K = K_1 \oplus K_2.$$

Alors tout opérateur $A \in \mathcal{L}(H, K)$, prend la forme matricielle

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

où $A_{ij} \in \mathcal{L}(H_j, K_i)$.
Si $A \in \mathcal{L}(H)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

on écrit $A = A_1 \oplus A_2$. Cette expression dite somme directe orthogonale de A_1 et A_2.

Définition 1.16 (*Décomposition Cartésienne*)
Tout opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ peut s'écrire sous la forme $A = B + iC$ où

$$B = \frac{1}{2}(A + A^*) \text{ et } C = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

B est appelé réel de A et est noté $\mathrm{Re}(A)$ et C est appelé imaginaire de A et est noté $\mathrm{Im}(A)$.
B et C sont auto-adjoints, et l'expression $A = B + iC$ dite décomposition cartésienne de A.

Théorème 1.6 (*Identité de polarisation généralisée*)
Si H est complexe et $A \in \mathcal{L}(H)$, alors pour tout $x, y \in H$ on a

$$\langle Ax, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle + i\langle A(x+iy), x+iy\rangle - i\langle A(x-iy), x-iy\rangle\right].$$

Proposition 1.6 *Si H est complexe et $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\langle Ax, x\rangle = 0$ pour tout $x \in H$, alors $A = 0$.*

Lemme 1.1 (*Inégalité mixte de Schwartz* [18])
Si $A \in \mathcal{L}(H)$, alors

$$|\langle Ax, x\rangle| \leq \langle |A|x, x\rangle^{1/2} \langle |A^*|x, x\rangle^{1/2}$$

pour tout $x \in H$.

Lemme 1.2 ([15]) *Si $A, B \in \mathcal{L}(H)$ sont deux opérateurs positifs, alors*

$$\|A^{1/2}B^{1/2}\| \leq \|AB\|^{1/2}.$$

Lemme 1.3 ([23]) *Si $A, B \in \mathcal{L}(H)$ sont deux opérateurs positifs, alors*

$$\|A+B\| \leq \frac{1}{2}(\|A\|+\|B\|+\sqrt{(\|A\|-\|B\|)^2+4\|A^{1/2}B^{1/2}\|^2}).$$

Lemme 1.4 ([22]) *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ positif et soit $x \in H$ un vecteur unitaire. Alors*

(a). $\langle Ax,x\rangle^r \leq \langle A^r x,x\rangle$ *pour* $r \geq 1$.

(b). $\langle A^r x,x\rangle \leq \langle Ax,x\rangle^r$ *pour* $0 < r \leq 1$.

Lemme 1.5 ([22]) *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint. Alors, pour tout $x \in H$*

$$|\langle Ax,x\rangle| \leq \langle |A|x,x\rangle.$$

Lemme 1.6 ([22]) *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et $0 \leq \alpha \leq 1$. Alors*

$$|\langle Ax,y\rangle|^2 \leq \langle |A|^{2\alpha}x,x\rangle\langle |A^*|^{2(1-\alpha)}y,y\rangle,$$

pour tout $x, y \in H$.

Lemme 1.7 ([2]) *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$ deux opérateurs positifs. Alors*

$$\|(A+B)^r\| \leq \|A^r+B^r\|,$$

pour $0 < r \leq 1$.

Définition 1.17 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$*

1. *On appelle spectre de A et on note $\sigma(A)$ l'ensemble des nombres complexes λ tels que $(A-\lambda I)$ n'est pas inversible.*
2. *$\lambda \in \mathbb{C}$ est dite valeur propre de A, s'il existe un vecteur non nul x de H tel que $Ax = \lambda x$.*
3. *L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle spectre ponctuel de A et est noté $\sigma_p(A)$.*
4. *Le rayon spectral de A est le réel positif défini par*

$$r(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{n\to+\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Définition 1.18 *On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre approchée de A s'il existe une suite de vecteurs unitaires (x_n) dans H, tel que $Ax_n - \lambda x_n$ converge vers 0. L'ensemble de ces λ est appelé spectre ponctuel approché de A et est noté $\sigma_a(A)$.*

Proposition 1.7 *$\sigma_a(A) \subset \sigma(A)$ et $\partial\sigma(A) \subseteq \sigma_a(A)$, où $\partial\sigma(A)$ dénote la frontière de $\sigma(A)$.*

1.3 Quelques définitions et propriétés variantes

Définition 1.19

(*i*) *Un sous-ensemble M de H est dit convexe si pour tout $x,\ y$ dans M, le segment $[x,y]$ est inclus dans M, i.e*

$$\forall x, y \in M,\ \forall t \in [0,1]\,,\ tx + (1-t)\,y \in M.$$

(*ii*) *L'enveloppe convexe de M est la plus petite partie convexe de H qui contient M, noté $co\,(M)$.*

Définition 1.20 *Une fonction f d'un intervalle réel I est dite convexe lorsque pour tout x et y de I et tout $\lambda \in [0,1]$ on a*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Définition 1.21 *Une racine n-ième de l'unité est dite primitive si elle est d'orde exactement n, c'est-à-dire si n est le plus petit entier strictement positif pour lequel l'égalité est réalisée.*

Lemme 1.8 (*Inégalité arithmético-géométrique*)
La moyenne géométrique de n réels positifs x_1, x_2, ..., x_n est inférieure à leur moyenne arithmétique

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Lemme 1.9 *L'inégalité arithmético-géométrique se généralise aux moyennes pondérées arithmétique et géométrique. Si x_1, x_2, ..., $x_n \geq 0$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$ alors, en notant $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ on a*

$$\sqrt[\alpha]{x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}} \leq \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n}{\alpha},$$

avec égalité si et seulement si les x_k sont égaux.

Lemme 1.10 ([19]) *Pour $a, b \geq 0$, $0 < \alpha < 1$ et $r \neq 0$, soit*

$$M_r(a,b,\alpha) = (\alpha a^r + (1-\alpha) b^r)^{1/r}$$

et

$$M_0(a,b,\alpha) = a^\alpha b^{1-\alpha}.$$

Alors, pour $r \leq s$

$$M_r(a,b,\alpha) \leq M_s(a,b,\alpha).$$

Lemme 1.11 ([19]) *Pour $a, b \geq 0$ et $r > 0$, soit $N_r(a,b) = (a^r + b^r)^{1/r}$. Alors, pour $s \geq r > 0$*

$$N_s(a,b) \leq N_r(a,b).$$

Chapitre 2

Image et rayon numériques

Dans tout ce qui suit, A est un opérateur linéaire borné sur H.

2.1 Image numérique

Définition 2.1 *L'image numérique de A est le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par*

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle; x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Proposition 2.1 *Pour tout $B \in \mathcal{L}(H)$, tout sous-espace F de H et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ on a*

(1) $W(\alpha A + \beta I) = \alpha W(A) + \beta$.

(2) $W(A|F) \subset W(A)$, *où $A|F$ est la compression de A sur F.*

(3) $W(A^*) = \{\overline{z}\ ;\ z \in W(A)\}$.

(4) $W(A+B) \subset W(A) + W(B)$.

(5) $W(\mathrm{Re}(A)) = \mathrm{Re}\, W(A)$ *et* $W(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{Im}(W(A))$.

Preuve. (1), (3), (4) et (5) *sont évidentes.*
(2) *Si $x \in F$, alors*

$$\langle A|Fx, x\rangle = \langle P_F Ax, x\rangle = \langle Ax, P^*x\rangle = \langle Ax, P_F x\rangle = \langle Ax, x\rangle \in W(A).$$

■

Théorème 2.1 *Pour tout opérateur unitaire $U \in \mathcal{L}(H)$*

$$W(U^*AU) = W(A).$$

Preuve. Soit U un opérateur unitaire de $\mathcal{L}(H)$ et $x \in H$ tel que $\|x\| = 1$. Alors

$$\langle U^*AUx, x\rangle = \langle AUx, Ux\rangle \in W(A).$$

On dit que l'image numérique est invariante par équivalence unitaire.
Réciproquement, comme U est surjectif, alors il existe $y \in H$ tel que $x = Uy$, donc

$$\|y\| = \|U^*x\| = \|x\| = 1$$

D'où

$$\begin{aligned}\langle Ax, x\rangle &= \langle AUy, Uy\rangle \\ &= \langle U^*AUy, y\rangle \in W(U^*AU).\end{aligned}$$

■

Théorème 2.2

1. *L'image numérique de A est un ensemble non vide et borné.*
2. [28, 20] *$W(A)$ est un ensemble convexe de $\mathbb{C}$.*
3. *Si $A = A_1 \oplus A_2$ sur $H = H_1 \oplus H_2$, alors $W(A) = co(W(A_1) \cup W(A_2))$.*

Preuve.

(1)

a) Soit $x \in H, (x \neq 0)$ alors $\langle A\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\rangle \in W(A)$, d'où $W(A) \neq \varnothing$.

b) Soit $\lambda \in W(A)$, alors il existe $x \in H, \|x\| = 1$ tel que $\lambda = \langle Ax, x\rangle$

$$|\lambda| = |\langle Ax, x\rangle| \leq \|Ax\|\|x\| \leq \|A\|\|x\|^2 = \|A\|.$$

Donc pour tout $\lambda \in W(A)$; $|\lambda| \leq \|A\|$.

(2) Soient $\langle Ax, x\rangle$ et $\langle Ay, y\rangle$ deux points distincts de $W(A)$, avec $\|x\| = \|y\| = 1$.

Les vecteurs x, y ne sont pas colinéaires. Notons $F = vect\{x, y\}$, d'après la proposition 2.1, on obtient $W(A|F) \subset W(A)$. Comme $W(A|F)$ est une surface elliptique[26], elle contient alors le segment joignant $\langle Ax, x\rangle$ et $\langle Ay, y\rangle$. D'où $W(A)$ est convexe.

(3) [$\supset$] Soient $x \in H_1$ et $y \in H_2$ tels que $\|x\| = \|y\| = 1$. Montrons que le segment joignant les deux points $\langle A_1x, x\rangle \in W(A_1)$, $\langle A_2y, y\rangle \in W(A_2)$ est dans $W(A)$.

Soient $t, s \in [0,1]$ tels que $t^2 + s^2 = 1$. On a

$$t^2\langle A_1 x, x\rangle + s^2\langle A_2 y, y\rangle = \langle A(tx, sy), (tx, sy)\rangle \in W(A)$$

$[\subset]$ Soit $z \in H$, alors $z = (x, y)$ où $x \in H_1$, $y \in H_2$ et $\|z\| = \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1$.
Le point $\langle Az, z\rangle$ appartient à $co\,(W\,(A) \cup W(A))$. En effet,

$$\langle Az, z\rangle = \langle A_1 x, x\rangle + \langle A_2 y, y\rangle = \|x\|^2 \langle A_1 \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\rangle + \|y\|^2 \langle A_2 \frac{y}{\|y\|}, \frac{y}{\|y\|}\rangle.$$

■

Théorème 2.3 ([3]) *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$ tels que A est positif et $AB = BA$. Alors*

$$W(AB) \subset W(A)W(B).$$

Preuve. Pour tout $x \in H$

$$\langle ABx, x\rangle = \left\langle BA^{1/2}x, A^{1/2}x\right\rangle,$$

où $A^{1/2}$ est la racine carrée positive de A. Alors, pour $y = \frac{A^{1/2}x}{\|A^{1/2}x\|}$ avec $A^{1/2}x \neq 0$ on obtient

$$\langle ABx, x\rangle = \langle By, y\rangle \left\|A^{1/2}x\right\|^2 = \langle By, y\rangle \langle Ax, x\rangle.$$

■

Théorème 2.4 *A est auto-adjoint si et seulement si $W(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Preuve. Si A est auto-adjoint, alors, pour tout $x \in H$,

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}.$$

Donc $W(A) \subseteq \mathbb{R}$.
Inversement, si $W(A) \subseteq \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in H$

$$\langle Ax, x\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \langle x, Ax\rangle = \langle A^*x, x\rangle,$$

donc

$$\langle (A^* - A)x, x\rangle = 0, \forall x \in H.$$

D'où par la proposition 1.6 $A^* = A$. ■

2.2 Rayon numérique

Définition 2.2 *Le rayon numérique de A est le réel positif donné par*

$$w(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in W(A)\}.$$

Notez que, pour tout vecteur $x \in H$, nous avons

$$|\langle Ax, x\rangle| \leq w(A)\|x\|^2.$$

Théorème 2.5 *Le rayon numéique vérifie les inégalités suivantes*

$$w(A) \leq \|A\| \leq 2w(A).$$

Preuve. Si $\lambda = \langle Ax, x\rangle$ avec $\|x\| = 1$, nous avons par l'inégalité de Cauchy Schwartz

$$|\lambda| \leq |\langle Ax, x\rangle| \leq \|Ax\| \leq \|A\|.$$

Pour prouver l'autre inégalité, nous utilisons l'identité de polarisation généralisée

$$4\langle Ax, y\rangle = \langle A(x+y, x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle + i\langle A(x+iy), x+iy\rangle - i\langle A(x-iy), x-iy\rangle.$$

On obtient

$$\begin{aligned} 4|\langle Ax, y\rangle| &\leq w(A)[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2] \\ &= 4w(A)[\|x\|^2 + \|y\|^2], \end{aligned}$$

et pour $\|x\| = \|y\| = 1$, on a

$$4|\langle Ax, y\rangle| \leq 8w(A),$$

ce qui implique par la proposition 1.3 que

$$\|A\| \leq 2w(A).$$

■

Théorème 2.6 *Le rayon numérique définit une norme sur $\mathcal{L}(H)$.*

Preuve.

(i) $w(A) = 0$ et $\|A\| \leq 2w(A) = 0$. Donc $\|A\| = 0$, i.e $A = 0$.

(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} w(\alpha A) &= \sup\{|z|\,; z \in W(\alpha A)\} \\ &= \sup\{|z|\,; z \in \alpha W(A)\} \\ &= \sup\{|\alpha y|\,; \alpha y \in \alpha W(A)\} \\ &= |\alpha| \sup\{|y|\,; y \in W(A)\} \\ &= |\alpha|\, w(A). \end{aligned}$$

■

Preuve. Pour tout $A, B \in \mathcal{L}(H)$

$$\begin{aligned} w(A+B) &= \sup\{|z|\,; z \in W(A+B)\} \\ &\leq \sup\{|z|\,; z \in W(A) + W(B)\} \\ &= \sup\{|\lambda+\mu|\,; \lambda \in W(A), \mu \in W(B)\} \\ &\leq \sup\{|\lambda| + |\mu|\,; \lambda \in W(A), \mu \in W(B)\} \\ &= \sup\{|\lambda|\,; \lambda \in W(A)\} + \sup\{|\mu|\,; \mu \in W(B)\}. \\ &= w(A) + w(B). \end{aligned}$$

■

Remarque 2.1 *Le théorème* 2.5 *dite théorème de normes équivalentes.*

Théorème 2.7 *Si* $w(A) = \|A\|$, *alors*

$$r(A) = \|A\|.$$

Preuve. Supposons sans perte de généralités que $w(A) = \|A\| = 1$. Alors, il existe une suite de vecteurs unitaires $\{x_n\}$ telle que $\langle Ax_n, x_n\rangle \to \lambda \in W(A)$, $|\lambda| = 1$. De l'inégalité

$$|\langle Ax_n, x_n\rangle| \leq \|Ax_n\| \leq 1,$$

on a $\|Ax_n\| \to 1$. Par conséquent

$$\|(A-I)x_n\|^2 = \|Ax_n\|^2 - \langle Ax_n, x_n\rangle - \langle x_n, Ax_n\rangle + \|x_n\|^2 \to 0.$$

Donc $1 \in \sigma_a(A)$ et $r(A) = 1$. ■

Théorème 2.8 *Si* $\lambda \in W(A)$, *tel que* $|\lambda| = \|A\|$, *alors* $\lambda \in \sigma_p(A)$.

Preuve. Soit $\lambda = \langle Ax, x\rangle$, $\|x\| = 1$. Alors

$$\|A\| = |\lambda| = |\langle Ax, x\rangle| \leq \|Ax\| \leq \|A\|,$$

donc $|\langle Ax, x\rangle| = \|Ax\|\|x\|$. Ainsi par théorème 1.2 $Ax = \mu x$ pour certains $\mu \in \mathbb{C}$. Cependant, $\lambda = \langle Ax, x\rangle = \langle \mu x, x\rangle = \mu$ et donc $Ax = \lambda x$. ■

Théorème 2.9 ([4]) *Si $R(A) \perp R(A^*)$, alors $w(A) = \frac{1}{2}\|A\|$.*

Preuve. Soit $x \in H$, tel que $\|x\| = 1$. Nous pouvons écrire $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in \ker(A)$, $x_2 \in \overline{R(A^*)}$. Alors

$$\langle Ax, x\rangle = \langle A(x_1 + x_2), x_1 + x_2\rangle = \langle Ax_2, x_1\rangle ,$$

puisque $Ax_1 = 0$ et $\langle Ax_2, x_2\rangle = 0$. Ainsi

$$|\langle Ax, x\rangle| \leq \|A\|\|x_2\|\|x_1\| \leq \frac{\|A\|}{2}[\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2] = \frac{\|A\|}{2}.$$

Puisque x est arbitraire, nous avons

$$w(A) \leq \frac{\|A\|}{2} \leq w(A).$$

■

Théorème 2.10 *Si A est normal, alors $\|A^n\| = \|A\|^n, n = 1, 2, \ldots$ De plus*

$$r(A) = w(A) = \|A\|.$$

Preuve. Pour tout $x \in H$,

$$\|Ax\|^2 = \langle A^*Ax, x\rangle \leq \|A^*Ax\| = ||A^2x||.$$

D'où $\|A\|^2 \leq \|A^2\|$. Comme nous avons toujours $\|A^2\| \leq \|A\|^2$, nous concluons que $\|A^2\| = \|A\|^2$. Maintenant,

$$\|A^nx\|^2 = \langle A^*A^nx, A^{n-1}x\rangle \leq \|A^{n+1}x\|\|A^{n-1}x\|$$

pour $n = 2, 3, \ldots$. En utilisant l'induction, nous prouvons que $\|A^n\| = \|A\|^n, n = 1, 2, \ldots$ De plus, puisque $\|A^n\| = \|A\|^n$, nous avons $r(A) = \|A\|$. ■

Chapitre 3

Inégalités pour un opérateur

3.1 Inégalités générales

Théorème 3.1 ([24]) *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors*

$$w(A) \leq \frac{1}{2}(\|A\| + \|A^2\|^{1/2}). \tag{3.1}$$

Preuve. Par l'inégalité mixte de Schwartz (lemme 1.1) et par l'inégalité arithmético-géométrique (lemme 1.8), nous avons pour tout $x \in H$,

$$\begin{aligned} |\langle Ax, x\rangle| &\leq \langle |A|x, x\rangle^{1/2} \langle |A^*|x, x\rangle^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2}(\langle |A|x, x\rangle + \langle |A^*|x, x\rangle) \\ &= \frac{1}{2}\langle (|A| + |A^*|)x, x\rangle . \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} w(A) &= \sup\{|\langle Ax, x\rangle|; x \in H, \|x\| = 1\} \\ &\leq \frac{1}{2}\sup\{\langle (|A| + |A^*|)x, x\rangle ; x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \frac{1}{2}\||A| + |A^*|\|. \end{aligned}$$

Comme $\||A|\| = \||A^*|\| = \|A\|$ et $\||A||A^*|\| = \|A^2\|$, alors d'après les lemmes 1.2 et 1.3 on a

$$\begin{aligned} \||A| + |A^*|\| &\leq \frac{1}{2}(\||A|\| + \||A^*|\| + \sqrt{(\||A|\| - \||A^*|\|)^2 + 4\||A|^{1/2}|A^*|^{1/2}\|^2}) \\ &\leq \frac{1}{2}(2\|A\| + \sqrt{4\||A|^{1/2}|A^*|^{1/2}\|^2}) \\ &= \|A\| + \||A|^{1/2}|A^*|^{1/2}\| \\ &= \|A\| + \|A^2\|^{1/2}. \end{aligned}$$

D'où

$$w(A) \leq \frac{1}{2}(\|A\| + \|A^2\|^{1/2}).$$

■

Théorème 3.2 ([4]) *Si on note par α l'angle entre les images de A et A^*, alors*

$$w(A) \leq \frac{1}{2}||A||[\cos\alpha + (\cos^2\alpha + 1)^{1/2}]. \tag{3.2}$$

Preuve. Soit $H_1 = \overline{R(A)}$. H_1 est clairement invariant par A et soit H_2 le complémentaire orthogonal de H_1. En représentant H comme $H_1 \oplus H_2$, nous pouvons représenter A par la matrice d'opérateurs deux à deux

$$A = \begin{pmatrix} T & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ i.e } A^* = \begin{pmatrix} T^* & 0 \\ B^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque B^* est une transformation de H_1 à son complémentaire orthogonal, nous savons que $\langle B^*x_1, x_1\rangle = 0$ pour tout $x_1 \in H_1$.
Ainsi si $x \in H$ et $x = x_1 + x_2$ tel que $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_2$ ensuite nous avons

$$|\langle T^*x_1, x_1\rangle| = |\langle (T^* + B^*)x_1, x_1\rangle| \leq (\cos\alpha)\|x_1\|^2\|A^*\|,$$

et comme $\langle A^*x, x\rangle = \langle T^*x_1, x_1\rangle + \langle B^*x_1, x_2\rangle$ nous trouvons que

$$|\langle A^*x, x\rangle| \leq (\cos\alpha)\|x_1\|^2\|A^*\| + \|x_1\|\|x_2\|\|A^*\|.$$

Si nous supposons que x est un vecteur unitaire alors $\|x_2\| = \sqrt{1 - \|x_1\|^2}$ et en maximisant la fonction $f(x) = (\cos\alpha)x^2 + x\sqrt{1 - x^2}$ nous constatons qu'une limite supérieure pour $|\langle A^*x, x\rangle|$ est $[\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + 1}](\frac{1}{2})\|A^*\|$. Parce que $||A|| = \|A^*\|$ et $w(A) = w(A^*)$ le théorème est prouvé. ■

Théorème 3.3 ([25]) *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors*

$$\frac{1}{4}\|A^*A + AA^*\| \leq w^2(A) \leq \frac{1}{2}\|A^*A + AA^*\|. \tag{3.3}$$

Preuve.

(1) On va prouver la première inégalité :

Soit $A = B + iC$ la décomposition cartésienne de A. Alors $A^*A + AA^* = 2(B^2 + C^2)$.
Soit $x \in H$. Alors, d'après la convexité de la fonction $f(t) = t^2$, on a pour $(B + C)^2(x) = f(x)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\langle (B \mp C)x, x\rangle|^2 &= \frac{1}{2}|\langle Bx, x\rangle \mp \langle Cx, x\rangle|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}(|\langle Bx, x\rangle| + |\langle Cx, x\rangle|)^2 \\ &\leq \langle Bx, x\rangle^2 + \langle Cx, x\rangle^2 \\ &= |\langle Ax, x\rangle|^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} w^2(A) &= \sup\{|\langle Ax,x\rangle|^2; x\in H, \|x\|=1\} \\ &\geq \frac{1}{2}\sup\{|\langle (B\mp C)x,x\rangle|^2; x\in H, \|x\|=1\} \\ &= \frac{1}{2}\|B\mp C\|^2 = \frac{1}{2}\|(B\mp C)^2\|. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|A^*A+AA^*\| &= \|B^2+C^2\| \\ &= \|\frac{1}{2}(2B^2+2C^2+2BC-2BC)\| \\ &= \frac{1}{2}\|(B^2+C^2+2BC)+(B^2+C^2-2BC)\| \\ &= \frac{1}{2}\|(B+C)^2+(B-C)^2\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|(B+C)^2\|+\frac{1}{2}\|(B-C)^2\| \\ &\leq 2w^2(A), \end{aligned}$$

d'où

$$w^2(A)\geq \frac{1}{4}\|A^*A+AA^*\|.$$

(2) On va prouver la deuxième inégalité :

Soit x un vecteur unitaire de H. Par l'inégalité de Cauchy Schwartz, on a

$$\begin{aligned} |\langle Ax,x\rangle|^2 &= \langle Bx,x\rangle^2+\langle Cx,x\rangle^2 \\ &\leq \|Bx\|^2+\|Cx\|^2 \\ &= \langle Bx,Bx\rangle+\langle Cx,Cx\rangle \\ &= \langle B^2x,x\rangle+\langle C^2x,x\rangle \\ &= \langle (B^2+C^2)x,x\rangle. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|A^*A+AA^*\| &= \|B^2+C^2\| \\ &= \sup\{|\langle (B^2+C^2)x,x\rangle|; x\in H, \|x\|=1\} \\ &\geq \sup\{|\langle Ax,x\rangle|^2; x\in H, \|x\|=1\} \\ &= w^2(A), \end{aligned}$$

et donc

$$w^2(A)\leq \frac{1}{2}\|A^*A+AA^*\|.$$

■

Théorème 3.4 ([10]) *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors*

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2}[w(A^2) + \|A\|^2]. \tag{3.4}$$

La constante $\frac{1}{2}$ est optimale dans (3.4).

Preuve. Nous avons besoin de l'amélioration suivante de l'inégalité de Schwarz obtenue par Dragomir [5]

$$\|a\|\|b\| \ \geq |\langle a,b\rangle - \langle a,e\rangle\langle e,b\rangle| + |\langle a,e\rangle\langle e,b\rangle| \ \geq |\langle a,b\rangle|,$$

pour tous vecteurs a, b, e dans H avec $\|e\| = 1$.
Observons que

$$|\langle a,b\rangle - \langle a,e\rangle\langle e,b\rangle| \ \geq |\langle a,e\rangle\langle e,b\rangle| - |\langle a,b\rangle|.$$

Donc par la première inégalité de l'avant-derniere inégalité on en déduit

$$\frac{1}{2}(\|a\|\|b\| + |\langle a,b\rangle|) \geq |\langle a,e\rangle\langle e,b\rangle|.$$

Maintenant, on choisit dans l'inégalité precédente, $e = x$, $\|x\| = 1$, $a = Ax$ et $b = A^*x$, on obtient

$$\frac{1}{2}(\|Ax\|\|A^*x\| + |\langle A^2x, x\rangle|) \geq |\langle Ax, x\rangle|^2$$

pour tout $x \in H, \|x\| = 1$.
En prenant le supremum dans la dernière inégalité sur $x \in H, \|x\| = 1$, on en déduit l'inégalité souhaitée

$$\frac{1}{2}(\|A\|^2 + w(A^2)) \geq w^2(A).$$

Maintenant, si nous supposons que (3.4) est vrai avec une constante $c > 0$, i.e ,

$$w^2(A) \leq c(\|A\|^2 + w(A^2)),$$

pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors si nous choisissons A un opérateur normal et utilisons le fait que $w(A) = \|A\|$ et $w(A^2) = \|A^2\| = \|A\|^2$, puis par la dernière inégalité on en déduit que $2c \geq 1$. ■

3.2 Inégalités de puissance

Théorème 3.5 ([1]) *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors pour tout nombre naturel n nous avons*

$$w(A^n) \leq w^n(A). \tag{3.5}$$

Preuve. Supposons que $w(A) \leq 1$ et montrons que $w(A^n) \leq 1$.
Si a est un nombre complexe avec $|a| \leq 1$ et si $|z| < 1$, alors

$$\mathrm{Re}(1 - za) = 1 - \mathrm{Re}(za) \geq 1 - |z| > 0.$$

Par contre si le nombre complexe a est tel que $\mathrm{Re}(1 - za) \geq 0$ pour tout z avec $|z| < 1$, alors c'est vrai, en particulier, si $za = t\,|a|\,, 0 < t < 1$; alors

$$1 - t\,|a| = \mathrm{Re}(1 - t\,|a|) \geq 0,$$

quand t tend vers 1, on obtient que $|a| \leq 1$. Donc, pour $|z| < 1$

$$|a| \leq 1 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(1 - za) \geq 0,$$

identiquement,

$$w(A) \leq 1 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(1 - zw(A)) \geq 0.$$

Ainsi,

$$w(A) \leq 1 \Longleftrightarrow \langle \mathrm{Re}(I - zA)x, x\rangle \geq 0$$

pour tout $x \in H, \|x\| = 1$, d'où

$$w(A) \leq 1 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(I - zA) \geq 0$$

pour tout $|z| < 1$.
Si $w(A) \leq 1$, alors $r(A) \leq 1$, donc $I - zA$ est inversible quand $|z| < 1$.
La partie réelle d'un opérateur inversible est positive si est seulement si la partie réelle de son inverse est positive, en effet : si $B \in \mathcal{L}(H)$ est inversible, alors

$$\begin{aligned} \left\langle B^{-1}x, x\right\rangle &= \left\langle B^{-1}x, BB^{-1}x\right\rangle \\ &= \overline{\langle B(B^{-1}x), (B^{-1}x)\rangle}, \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $w(A) \leq 1$ si est seulement si $\mathrm{Re}(1 - zA)^{-1} \geq 0$ dans le disque de l'unité.
D'après [18 problème 221], si θ est une racine n-ième primitive de l'unité et $w(A) \leq 1$, alors

$$(1 - z^n A^n)^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1 - \theta^k zA)^{-1}$$

quand $|z| < 1$.
Comme $w(\theta^k A) \leq 1$, alors

$$\mathrm{Re}(1 - z^n A^n)^{-1} \geq 0,$$

identiquement,

$$\mathrm{Re}(1 - z^n A^n) \geq 0.$$

Ainsi,

$$w(A^n) \leq 1.$$

■

Théorème 3.6 ([13]) *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et $A = B + iC$ sa décomposition cartésienne. Alors*

$$w^r(A) \leq 2^{\frac{r}{2}-1} \||B|^r + |C|^r\|, \tag{3.6}$$

pour $r \geq 2$.

Preuve. Pour tout vecteur unitaire $x \in H$, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{|\langle Ax, x\rangle|}{\sqrt{2}} &= \Big(\frac{\langle Bx, x\rangle^2 + \langle Cx, x\rangle^2}{2}\Big)^{1/2} \\
&\leq \Big(\frac{|\langle Bx, x\rangle|^r + |\langle Cx, x\rangle|^r}{2}\Big)^{1/r} && \text{(par le lemme 1.10)} \\
&\leq 2^{-\frac{1}{r}}(\langle |B|x, x\rangle^r + \langle |C|x, x\rangle^r)^{1/r} && \text{(par le lemme 1.5)} \\
&\leq 2^{-\frac{1}{r}}(\langle |B|^r x, x\rangle + \langle |C|^r x, x\rangle)^{1/r} && \text{(par le lemme 1.4(a))} \\
&= 2^{-\frac{1}{r}}\langle (|B|^r + |C|^r)x, x\rangle^{1/r}.
\end{aligned}$$

Alors,

$$|\langle Ax, x\rangle|^r \leq 2^{\frac{r}{2}-1}\langle (|B|^r + |C|^r)x, x\rangle,$$

et donc

$$\begin{aligned}
w^r(A) &= \sup\{|\langle Ax, x\rangle|^r; x \in H,\ \|x\| = 1\} \\
&\leq 2^{\frac{r}{2}-1} \sup\{\langle (|B|^r + |C|^r)x, x\rangle; x \in H,\ \|x\| = 1\} \\
&= 2^{\frac{r}{2}-1} \||B|^r + |C|^r\|.
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.7 ([13]) *Si $A = B + iC$ est la décomposition cartésienne de $A \in \mathcal{L}(H)$, alors*

$$w^r(A) \leq \||B|^r + |C|^r\|, \tag{3.7}$$

pour $r \in]0, 2]$.

Preuve. On prouve d'abord l'inégalité plus forte que (3.7) pour le cas particulier où $1 \leq r \leq 2$. Pour tout vecteur unitaire $x \in H$, et pour $1 \leq r \leq 2$, on a

$$\begin{aligned} |\langle Ax, x\rangle| &= (\langle Bx, x\rangle^2 + \langle Cx, x\rangle^2)^{1/2} \\ &\leq (|\langle Bx, x\rangle|^r + |\langle Cx, x\rangle|^r)^{1/r} && \text{(par le lemme 1.11)} \\ &\leq (\langle |B|x, x\rangle^r + \langle |C|x, x\rangle^r)^{1/r} && \text{(par le lemme 1.5)} \\ &\leq (\langle |B|^r x, x\rangle + \langle |C|^r x, x\rangle)^{1/r} && \text{(par le lemme 1.4(a))} \\ &= \langle (|B|^r + |C|^r)x, x\rangle^{1/r}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient l'inégalité forte

$$|\langle Ax, x\rangle|^r \leq \langle (|B|^r + |C|^r)x, x\rangle,$$

et donc

$$\begin{aligned} w^r(A) &= \sup\{|\langle Ax, x\rangle|^r; x \in H,\ \|x\| = 1\} \\ &\leq \sup\{\langle (|B|^r + |C|^r)x, x\rangle; x \in H,\ \|x\| = 1\} \\ &= \||B|^r + |C|^r\|. \end{aligned}$$

Pour le cas général, où $0 < r \leq 2$ et comme $w^2(A) \leq \|B^2 + C^2\|$, on a

$$\begin{aligned} w^r(A) &\leq \|B^2 + C^2\|^{r/2} \\ &= \|(B^2 + C^2)^{r/2}\| \\ &\leq \||B|^r + |C|^r\|. && \text{(par le lemme 1.7)} \end{aligned}$$

■

Théorème 3.8 ([13]) *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et $A = B + iC$ sa décomposition cartésienne et soit $r \geq 2$. Alors*

$$2^{-\frac{r}{2}-1}\||B + C|^r + |B - C|^r\| \leq w^r(A) \leq \frac{1}{2}\||B + C|^r + |B - C|^r\|. \tag{3.8}$$

Preuve.

1. On va d'abord prouver la première inégalité.

   Nous avons d'après le théorème 3.3

   $$|\langle Ax, x\rangle|^2 \geq \frac{1}{2}|\langle (B \pm C)x, x\rangle|^2.$$

   Alors,

   $$w^2(A) \geq \frac{1}{2}\|(B \pm C)^2\|,$$

identiquement

$$w(A) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\|(B \pm C)^2\|^{1/2},$$

et donc

$$\begin{aligned} w^r(A) &\geq \frac{1}{2^{r/2}}\|(B \pm C)^2\|^{r/2} \\ &= 2^{-r/2}\||B \pm C|^r\|, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 2w^r(A) &\geq 2^{-r/2}(\||B+C|^r\| + \||B-C|^r\|) \\ &\geq 2^{-r/2}(\||B+C|^r + |B-C|^r\|). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$w^r(A) \geq 2^{-\frac{r}{2}-1}(\||B+C|^r + |B-C|^r\|).$$

2. Pour prouver la deuxième inégalité, soit $x \in H$ un vecteur unitaire. Alors

$$|\langle Ax, x\rangle| = (\langle Bx, x\rangle^2 + \langle Cx, x\rangle^2)^{1/2},$$

donc

$$\begin{aligned} |\langle Ax, x\rangle|^r &= (\langle Bx, x\rangle^2 + \langle Cx, x\rangle^2)^{r/2} \\ &= (\frac{1}{2}(\langle (B+C)x, x\rangle^2 + \langle (B-C)x, x\rangle^2))^{r/2} \\ &= 2^{-r/2}(\langle (B+C)x, x\rangle^2 + \langle (B-C)x, x\rangle^2)^{r/2} \\ &\leq 2^{\frac{r}{2}-1}(2^{-r/2}(|\langle (B+C)x, x\rangle|^r + |\langle (B-C)x, x\rangle|^r)) \\ &= 2^{\frac{r}{2}-\frac{r}{2}-1}(|\langle (B+C)x, x\rangle|^r + |\langle (B-C)x, x\rangle|^r) \\ &= \frac{1}{2}(|\langle (B+C)x, x\rangle|^r + |\langle (B-C)x, x\rangle|^r) \\ &\leq \frac{1}{2}(\langle |B+C|x, x\rangle^r + \langle |B-C|x, x\rangle^r) \qquad \text{(par le lemme 1.5)} \\ &\leq \frac{1}{2}(\langle |B+C|^r x, x\rangle + \langle |B-C|^r x, x\rangle) \qquad \text{(par le lemme 1.4(a))} \\ &= \frac{1}{2}\langle (|B+C|^r + |B-C|^r)x, x\rangle. \end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} w^r(A) &= \sup\{|\langle Ax, x\rangle|^r; x \in H,\ \|x\| = 1\} \\ &\leq \frac{1}{2}\sup\{\langle (|B+C|^r + |B-C|^r)x, x\rangle;\ x \in H,\ \|x\| = 1\} \\ &= \frac{1}{2}\||B+C|^r + |B-C|^r\|. \end{aligned}$$

■

Remarque 3.1 *Nous observons que pour* $r = 1$, *nous obtenons de* (3.7)

$$w(A) \leq \||B| + |C|\|.$$

Alors que pour $r = 2$, *on obtient de* (3.6) *ou de* (3.7)

$$w^2(A) \leq \||B|^2 + |C|^2\|,$$

et de (3.8)

$$\frac{1}{4}\||B + C|^2 + |B - C|^2\| \leq w^2(A) \leq \frac{1}{2}\||B + C|^2 + |B - C|^2\|.$$

Théorème 3.9 ([13]) *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$. *Alors*

$$w^r(A) \leq \frac{1}{2}\||A|^{2\alpha r} + |A^*|^{2(1-\alpha)r}\|, \tag{3.9}$$

où $\alpha \in]0, 1[$ *et* $r \geq 1$.

Preuve. Pour tout vecteur unitaire $x \in H$, nous avons

$$|\langle Ax, x\rangle| \leq \langle |A|^{2\alpha}x, x\rangle^{1/2}\langle |A^*|^{2(1-\alpha)}x, x\rangle^{1/2}, \qquad \text{(par le lemme 1.6)}$$

appliquons le lemme 1.10 pour

$$a = \langle |A|^{2\alpha}x, x\rangle, b = \langle |A^*|^{2(1-\alpha)}x, x\rangle \text{ et } \alpha = \frac{1}{2},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\langle |A|^{2\alpha}x, x\rangle^{1/2}\langle |A^*|^{2(1-\alpha)}x, x\rangle^{1/2} &= a^\alpha b^{1-\alpha} \\
&\leq (\alpha a^r + (1-\alpha)b^r)^{1/r} \\
&= (\frac{1}{2}\langle |A|^{2\alpha}x, x\rangle^r + \frac{1}{2}\langle |A^*|^{2(1-\alpha)}x, x\rangle^r)^{1/r} \\
&= (\frac{\langle |A|^{2\alpha}x, x\rangle^r + \langle |A^*|^{2(1-\alpha)}x, x\rangle^r}{2})^{1/r}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
|\langle Ax, x\rangle| &\leq \langle |A|^{2\alpha}x, x\rangle^{1/2}\langle |A^*|^{2(1-\alpha)}x, x\rangle^{1/2} && \text{(par le lemme 1.6)} \\
&\leq (\frac{\langle |A|^{2\alpha}x, x\rangle^r + \langle |A^*|^{2(1-\alpha)}x, x\rangle^r}{2})^{1/r} && \text{(par le lemme 1.10)} \\
&\leq (\frac{\langle |A|^{2\alpha r}x, x\rangle + \langle |A^*|^{2(1-\alpha)r}x, x\rangle}{2})^{1/r}, && \text{(par le lemme 1.4(a))}
\end{aligned}$$

donc,

$$|\langle Ax,x\rangle|^r \leq \frac{1}{2}\langle(|A|^{2\alpha r}+|A^*|^{2(1-\alpha)r})x,x\rangle.$$

D'où

$$\begin{aligned} w^r(A) &= \sup\{|\langle Ax,x\rangle|^r;\ x\in H,\ \|x\|=1\} \\ &\leq \frac{1}{2}\sup\{\langle(|A|^{2\alpha r}+|A^*|^{2(1-\alpha)r})x,x\rangle;\ x\in H,\ \|x\|=1\} \\ &= \frac{1}{2}\||A|^{2\alpha r}+|A^*|^{2(1-\alpha)r}\|. \end{aligned}$$

■

Théorème 3.10 ([13]) *Soit $A\in\mathcal{L}(H)$. Alors*

$$w^{2r}(A)\leq\|\alpha|A|^{2r}+(1-\alpha)|A^*|^{2r}\|, \tag{3.10}$$

pour tout $\alpha\in]0,1[$ et $r\geq 1$.

Preuve. Pour tout vecteur unitaire $x\in H$, nous avons

$$\begin{aligned} |\langle Ax,x\rangle|^2 &\leq \langle|A|^{2\alpha}x,x\rangle+\langle|A^*|^{2(1-\alpha)}x,x\rangle && \text{(par le lemme 1.6)} \\ &\leq \langle|A|^2x,x\rangle^{\alpha}+\langle|A^*|^2x,x\rangle^{(1-\alpha)} && \text{(par le lemme 1.4(b))} \\ &\leq (\alpha\langle|A|^2x,x\rangle^r+(1-\alpha)\langle|A^*|^2x,x\rangle^r)^{1/r} && \text{(par le lemme 1.10)} \\ &\leq (\alpha\langle|A|^{2r}x,x\rangle+(1-\alpha)\langle|A^*|^{2r}x,x\rangle)^{1/r} && \text{(par le lemme 1.4(a))} \\ &= \langle(\alpha|A|^{2r}+(1-\alpha)|A^*|^{2r})x,x\rangle^{1/r}. \end{aligned}$$

Donc,

$$|\langle Ax,x\rangle|^{2r}\ \leq\langle(\alpha|A|^{2r}+(1-\alpha)|A^*|^{2r})x,x\rangle,$$

d'où

$$\begin{aligned} w^{2r}(A) &= \sup\{|\langle Ax,x\rangle|^{2r};\ x\in H,\ \|x\|=1\} \\ &\leq \sup\{\langle(\alpha|A|^{2r}+(1-\alpha)|A^*|^{2r})x,x\rangle;\ x\in H,\ \|x\|=1\} \\ &= \|\alpha|A|^{2r}+(1-\alpha)|A^*|^{2r}\|. \end{aligned}$$

■

Remarque 3.2 *Si on prend $\alpha=\frac{1}{2}$ et $r=1$, nous obtenons de* (3.9)

$$w(A)\leq\frac{1}{2}(\||A|+|A^*|\|),$$

et de (3.10)

$$w^2(A)\leq\frac{1}{2}(\||A|^2+|A^*|^2\|).$$

3.3 Inégalités en sens inverse

Théorème 3.11 ([8]) *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $r > 0$ tels que*

$$\|A - \lambda I\| \leq r,$$

alors

$$(0 \leq)\|A\| - w(A) \leq \frac{1}{2}\frac{r^2}{|\lambda|}. \tag{3.11}$$

Preuve. Pour $x \in H$ avec $\|x\| = 1$, nous avons

$$\|Ax - \lambda x\| \leq \|A - \lambda I\| \leq r.$$

Alors,

$$\|Ax - \lambda x\|^2 = \|Ax\|^2 + |\lambda|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle Ax, \lambda x\rangle \leq r^2,$$

et donc

$$\|Ax\|^2 + |\lambda|^2 \leq 2\,\mathrm{Re}[\lambda\,\langle Ax, x\rangle] + r^2 \leq 2|\lambda|\,|\langle Ax, x\rangle\,| + r^2.$$

En prenant le supremum sur $x \in H, \|x\| = 1$ dans l'inégalité précédente, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\|A\|^2 + |\lambda|^2 \leq 2|\lambda| \sup\{|\langle Ax, x\rangle|; x \in H, \|x\| = 1\} + r^2,$$

identiquement

$$\|A\|^2 + |\lambda|^2 \leq 2|\lambda| w(A) + r^2. \tag{3.12}$$

Comme

$$\|A\|^2 + |\lambda|^2 \geq 2|\lambda|\|A\|,$$

alors nous déduisons l'inégalité souhaitée (3.11)

$$2|\lambda|\|A\| \leq 2|\lambda| w(A) + r^2,$$

d'où

$$\|A\| - w(A) \leq \frac{1}{2}\frac{r^2}{|\lambda|}.$$

■

Remarque 3.3 *Si $R(A) \perp R(A^*)$, $\|A\| = 1$ et $\|A - I\| \leq 1$, l'égalité (3.11) est verifié . Effectivement, par le théorème 2.9, nous avons dans ce cas $w(A) = \frac{1}{2}\|A\| = \frac{1}{2}$ et puisque nous pouvons choisir $\lambda = 1$, $r = 1$ dans le théorème précédent, alors nous obtenons dans les deux côtés de (3.11) la même quantité $\frac{1}{2}$.*

Corollaire 3.1 *Supposons que A, λ, r sont comme dans le théorème* 3.11. *Si, en plus,*

$$||\lambda| - w(A)| \geq \rho$$

pour certains $\rho \geq 0$, alors

$$(0 \leq)\|A\|^2 - w^2(A) \leq r^2 - \rho^2.$$

Preuve. À partir de (3.12) du théorème 3.11, nous avons

$$\|A\|^2 - |\lambda|^2 \leq 2w(A)|\lambda| + r^2,$$

d'où

$$\|A\|^2 - w^2(A) \leq r^2 - (|\lambda| - w(A))^2.$$

Comme $||\lambda| - w(A)| \geq \rho$, alors

$$\|A\|^2 - w^2(A) \leq r^2 - \rho^2.$$

■

Remarque 3.4 *En particulier, si $\|A - \lambda I\| \leq r$ et $|\lambda| = w(A)$, alors*

$$(0 \leq)\|A\|^2 - w^2(A) \leq r^2. \tag{3.13}$$

Théorème 3.12 ([8]) *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $r > 0$ avec $|\lambda| > r$. Si*

$$\|A - \lambda I\| \leq r,$$

alors

$$\sqrt{1 - \frac{r^2}{|\lambda|^2}} \leq \frac{w(A)}{\|A\|}(\leq 1). \tag{3.14}$$

Preuve. À partir de (3.12) du théorème 3.11, nous avons

$$\|A\|^2 + |\lambda|^2 - r^2 \leq 2w(A)|\lambda|,$$

ce qui implique, en divisant par $\sqrt{|\lambda|^2 - r^2} > 0$

$$\frac{\|A\|^2}{\sqrt{|\lambda|^2 - r^2}} + \sqrt{|\lambda|^2 - r^2} \leq \frac{2w(A)|\lambda|}{\sqrt{|\lambda|^2 - r^2}}.$$

Par l'inégalité élémentaire

$$2\|A\| \leq \frac{\|A\|^2}{\sqrt{|\lambda|^2 - r^2}} + \sqrt{|\lambda|^2 - r^2},$$

et par (3.13) on obtient

$$\|A\| \leq \frac{w(A)|\lambda|}{\sqrt{|\lambda|^2 - r^2}},$$

d'où

$$\frac{\sqrt{|\lambda|^2 - r^2}}{|\lambda|} \leq \frac{w(A)}{\|A\|},$$

identiquement

$$\sqrt{1 - \frac{r^2}{|\lambda|^2}} \leq \frac{w(A)}{\|A\|}.$$

■

Remarque 3.5 *Le carré de cette inégalité donne l'inégalité*

$$(0 \leq)\|A\|^2 - w^2(A) \leq \frac{r^2}{|\lambda|^2}\|A\|^2.$$

Théorème 3.13 ([8]) *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $r > 0$ avec $|\lambda| > r$. Si*

$$\|A - \lambda I\| \leq r,$$

alors

$$(0 \leq)\|A\|^2 - w^2(A) \leq \frac{2r^2}{|\lambda| + \sqrt{|\lambda|^2 - r^2}} w(A). \tag{3.15}$$

Preuve. De la preuve du théorème 3.11, nous avons

$$\|Ax\|^2 + |\lambda|^2 \leq 2\,\mathrm{Re}[\bar{\lambda}\,\langle Ax, x\rangle] + r^2$$

pour tout $x \in H, \|x\| = 1$.
Si on divise l'inégalité précédente par $|\lambda||\langle Ax, x\rangle|$, on obtient

$$\frac{\|Ax\|^2}{|\lambda||\langle Ax, x\rangle|} \leq \frac{2\,\mathrm{Re}[\bar{\lambda}\,\langle Ax, x\rangle]}{|\lambda||\langle Ax, x\rangle|} + \frac{r^2}{|\lambda||\langle Ax, x\rangle|} - \frac{|\lambda|}{|\langle Ax, x\rangle|} \tag{3.16}$$

pour tout $x \in H, \|x\| = 1$.
Si nous soustrayons de (3.16) la même quantité $\frac{|\langle Ax,x\rangle|}{|\lambda|}$ des deux côtés, alors nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\|Ax\|^2}{|\lambda||\langle Ax, x\rangle|} - \frac{|\langle Ax, x\rangle|}{|\lambda|} &\leq \frac{2\,\mathrm{Re}[\bar{\lambda}\,\langle Ax, x\rangle]}{|\lambda||\langle Ax, x\rangle|} + \frac{r^2}{|\lambda||\langle Ax, x\rangle|} - \frac{|\langle Ax, x\rangle|}{|\lambda|} - \frac{|\lambda|}{|\langle Ax, x\rangle|} \\
&= \frac{2\,\mathrm{Re}[\bar{\lambda}\,\langle Ax, x\rangle]}{|\lambda||\langle Ax, x\rangle|} - \frac{|\lambda|^2 - r^2}{|\lambda||\langle Ax, x\rangle|} - \frac{|\langle Ax, x\rangle|}{|\lambda|} \\
&= \frac{2\,\mathrm{Re}[\bar{\lambda}\,\langle Ax, x\rangle]}{|\lambda||\langle Ax, x\rangle|} - \left(\frac{\sqrt{|\lambda|^2 - r^2}}{\sqrt{|\lambda||\langle Ax, x\rangle|}} - \frac{\sqrt{|\langle Ax, x\rangle|}}{\sqrt{|\lambda|}}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{|\lambda|^2 - r^2}}{|\lambda|}.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\mathrm{Re}[\bar{\lambda}\langle Ax,x\rangle] \leq |\lambda||\langle Ax,x\rangle|,$$

et

$$(\frac{\sqrt{|\lambda|^2-r^2}}{\sqrt{|\lambda||\langle Ax,x\rangle|}} - \frac{\sqrt{|\langle Ax,x\rangle|}}{\sqrt{|\lambda|}})^2 \geq 0,$$

et par (3.16), nous obtenons

$$\frac{\|Ax\|^2}{|\lambda||\langle Ax,x\rangle|} - \frac{|\langle Ax,x\rangle|}{|\lambda|} \leq \frac{2(|\lambda|-\sqrt{|\lambda|^2-r^2})}{|\lambda|},$$

ce qui donne l'inégalité

$$\|Ax\|^2 \leq |\langle Ax,x\rangle|^2 + 2|\langle Ax,x\rangle|(|\lambda|-\sqrt{|\lambda|^2-r^2})$$

pour tout $x \in H, \|x\| = 1$.
En prenant le supremum sur $x \in H, \|x\| = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\|A\|^2 &\leq \sup\left\{|\langle Ax,x\rangle|^2 + 2|\langle Ax,x\rangle|(|\lambda|-\sqrt{|\lambda|^2-r^2})\right\}\\ &\leq w^2(A) + 2(|\lambda|-\sqrt{|\lambda|^2-r^2})w(A).\end{aligned}$$

■

Théorème 3.14 ([10]) *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Si $||A|| \leq |\lambda|$, alors pour $r \geq 1$.*

$$\|A\|^{2r} + |\lambda|^{2r} \leq 2\|A\|^{r-1}|\lambda|^r w(A) + r^2|\lambda|^{2r-2}\|A-\lambda I\|^2. \tag{3.17}$$

Preuve. Utilisons l'inégalité suivante obtenue par Goldstein, Ryff et Clarke dans [16]

$$\|a\|^{2r} + \|b\|^{2r} - 2\|a\|^r\|b\|^r\frac{\mathrm{Re}\langle a,b\rangle}{\|a\|\|b\|} \leq \begin{cases} r^2\|a\|^{2r-2}\|a-b\|^2 \text{ si } r \geq 1,\\ \|b\|^{2r-2}\|a-b\|^2 \text{ si } r < 1,\end{cases}$$

pour tout $r \in \mathbb{R}$ et $a, b \in H$ avec $\|a\| \geq \|b\|$.
Maintenant, soit $x \in H$ avec $\|x\| = 1$. De l'hypothèse du théorème, nous avons que $\|Ax\| \leq |\lambda|\|x\|$, et par l'inégalité précédente avec $a = \lambda x$, $b = Ax$, on obtient

$$\|Ax\|^{2r} + |\lambda|^{2r} - 2\|Ax\|^{r-1}|\lambda|^r|\langle Ax,x\rangle| \leq r^2|\lambda|^{2r-2}\|Ax-\lambda x\|^2$$

pour tout $x \in H$, $\|x\| = 1$ et $r \geq 1$.
Prenant le supremum dans la dernière inégalité sur $x \in H$, $\|x\| = 1$, on en déduit l'inégalité souhaitée

$$\|A\|^{2r} + |\lambda|^{2r} - 2\|A\|^{r-1}|\lambda|^r w(A) \leq r^2|\lambda|^{2r-2}\|A-\lambda I\|^2.$$

■

Théorème 3.15 ([10]) *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors pour tout $\alpha \in [0,1]$ et $t \in \mathbb{R}$ on a l'inégalité*

$$\|A\|^2 \leq [(1-\alpha)^2 + \alpha^2]w^2(A) + \alpha\|A - tI\|^2 + (1-\alpha)\|A - itI\|^2. \tag{3.18}$$

Preuve. Nous utilisons l'inégalité suivante obtenue par Dragomir dans [9]

$$[\alpha\|tb - a\|^2 + (1-\alpha)\|itb - a\|^2]\|b\|^2 \geq \|a\|^2\|b\|^2 - [(1-\alpha)\operatorname{Im}\langle a, b\rangle + \alpha \operatorname{Re}\langle a, b\rangle]^2 (\geq 0).$$

On obtient

$$\begin{aligned} \|a\|^2\|b\|^2 &\leq [(1-\alpha)\operatorname{Im}\langle a, b\rangle + \alpha \operatorname{Re}\langle a, b\rangle]^2 + [\alpha\|tb - a\|^2 + (1-\alpha)\|itb - a\|^2]\|b\|^2 \\ &\leq [(1-\alpha)^2 - \alpha^2]|\langle a, b\rangle|^2 + [\alpha\|tb - a\|^2 + (1-\alpha)\|itb - a\|^2]\|b\|^2 \end{aligned}$$

pour tout $a, b \in H, \alpha \in [0,1]$ et $t \in \mathbb{R}$.
Choisissons dans l'inégalité précédente $a = Ax$, $b = x$, $\|x\| = 1$, on obtient

$$\|Ax\|^2 \leq [(1-\alpha)^2 - \alpha^2]|\langle Ax, x\rangle|^2 + [\alpha\|tx - Ax\|^2 + (1-\alpha)\|itx - Ax\|^2].$$

Enfin, en prenant le supremum sur $x \in H, \|x\| = 1$ dans cette inégalité, on en déduit le résultat souhaité

$$\|A\|^2 \leq [(1-\alpha)^2 - \alpha^2]w^2(A) + [\alpha\|tI - A\|^2 + (1-\alpha)\|itI - A\|^2].$$

■

Corollaire 3.2 *Pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$, on a*

$$(0 \leq)\|A\|^2 - w^2(A) \leq \begin{cases} \inf\limits_{t\in\mathbb{R}}\|A - tI\|^2, \\ \inf\limits_{t\in\mathbb{R}}\|A - itI\|^2, \end{cases} \tag{3.19}$$

et

$$\|A\|^2 \leq \frac{1}{2}w^2(A) + \frac{1}{2}\inf_{t\in\mathbb{R}}[\|A - tI\|^2 + \|A - itI\|^2].$$

Preuve. Si on prend $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ dans le théorème précédent, on obtient respectivement

$$\begin{aligned} \|A\|^2 - w^2(A) &\leq \inf_{t\in\mathbb{R}}\|A - tI\|^2, \\ \|A\|^2 - w^2(A) &\leq \inf_{t\in\mathbb{R}}\|A - itI\|^2, \end{aligned}$$

et

$$\|A\|^2 \leq \frac{1}{2}w^2(A) + \frac{1}{2}\inf_{t\in\mathbb{R}}[\|A - tI\|^2 + \|A - itI\|^2].$$

■

Remarque 3.6 *L'inégalité* (3.19) *peut être améliorée en tenant en compte l'inégalité suivante obtenue par Dragomir dans* [7]

$$\|a\|^2\|b\|^2 - |\langle a, b\rangle|^2 \leq \|b\|^2\|a - \lambda b\|^2 \tag{3.20}$$

pour tout $a, b \in H$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$.
Maintenant, si dans (3.20) *nous choisissons* $a = Ax$, $b = x$, $x \in H$, $\|x\| = 1$, *alors on obtient*

$$\|Ax\|^2 - |\langle Ax, x\rangle|^2 \leq \|Ax - \lambda x\|^2$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, *implique que*

$$(0 \leq)\|A\|^2 - w^2(A) \leq \inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\|A - \lambda I\|^2.$$

Si on prend $a = x, b = Ax$ *en* (3.20), *on obtient alors*

$$\|Ax\|^2 \leq |\langle Ax, x\rangle|^2 + \|Ax\|^2\|x - \mu Ax\|^2$$

pour tout $x \in H, \|x\| = 1$ *et* $\mu \in \mathbb{C}$. *Maintenant, si nous prenons le supremum sur* $x \in H, \|x\| = 1$ *dans la dernière inégalité, nous obtenons*

$$(0 \leq)\|A\|^2 - w^2(A) \leq \|A\|^2 \inf_{\mu\in\mathbb{C}}\|I - \mu A\|^2.$$

Chapitre 4

Inégalités pour deux opétareurs

4.1 Inégalités de base

Théorème 4.1 ([21]) *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Alors*

$$w(AB) \leq 4w(A)w(B). \tag{4.1}$$

Si $AB = BA$, alors

$$w(AB) \leq 2w(A)w(B). \tag{4.2}$$

La constante 2 est optimale ici.

Preuve. D'après l'équivalence des normes (théorème 2.6), nous savons que

$$w(AB) \leq \|AB\| \leq \|A\|\|B\| \ \leq 4w(A)w(B).$$

Sans perte de généralités, on peut supposer que $w(A) = w(B) = 1$ et montrer que $w(AB) \leq 2$. Comme le rayon numérique définit une norme, alors par l'inégalité triangulaire,le théorème 3.4 et la sous-additivité de w, nous avons

$$\begin{aligned} w(AB) &= w(\frac{1}{4}[(A+B)^2 - (A-B)^2]) \\ &\leq \frac{1}{4}[w((A+B)^2) + w((A-B)^2)] \\ &\leq \frac{1}{4}[(w(A+B))^2 + (w(A-B))^2] \\ &\leq \frac{1}{4}[(w(A)+w(B))^2 + (w(A)+w(B))^2] \\ &= 2. \end{aligned}$$

■

Théorème 4.2 ([17]) *Si $A \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur unitaire qui commute avec un autre opérateur $B \in \mathcal{L}(H)$, alors*

$$w(AB) \leq w(B). \tag{4.3}$$

Théorème 4.3 ([17]) *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, si A est une isométrie et $AB = BA$, alors*

$$w(AB) \leq w(B). \tag{4.4}$$

Preuve. Pour tout $x \in H$

$$\langle ABx, x\rangle = \langle BAx, x\rangle = \langle A^*ABAx, x\rangle - \langle ABAx, Ax\rangle .$$

Alors, il suffit de considérer la restriction de AB sur $R(A)$.
Sur $R(A)$, l'opérateur A est unitaire car $A^*A = I$ et pour tout $y = Ax \in R(A)$, on a

$$A^*Ay = AA^*Ax = Ax = y,$$

i.e $AA^* = I$ sur $R(A)$.
Donc, d'après le théorème précédent $w(AB) \leq w(B)$ sur $R(A)$. ■

Théorème 4.4 ([17]) *Si A et B deux opérateurs de $\mathcal{L}(H)$ doublement commuttent, alors*

$$w(AB) \leq w(B)\|A\|. \tag{4.5}$$

Preuve. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\|A\| < 1$. Il suffit donc de montrer que $w(AB) \leq w(B)$. Soit $D = (I - A^*A)^{1/2}$ (racine carrée positive), et considérons les deux opérateurs S et T défins sur $K = H \oplus H \oplus H \oplus ...$par

$$S(x_1, x_2, x_3, ...) = (Ax_1, Dx_1, x_2, x_3, ...).$$

$$T(x_1, x_2, x_3, ...) = (Bx_1, DBD^{-1}x_2, DBD^{-1}x_3, ...).$$

pour tout $(x_1, x_2, ...) \in K$.
Comme D^2 commute avec B, alors D, D^{-1} commutent avec B, et donc S commute avec T.
D'autre part, pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in K$

$$\begin{aligned} \|Sx\|_K^2 &= \|Ax_1\|^2 + \|Dx_1\|^2 + \|x\|_K^2 - \|x_1\|^2 \\ &= \langle A^*Ax_1, x_1\rangle + \left\langle D^2x_1, x_1\right\rangle + \langle x, x\rangle_K - \langle x_1, x_1\rangle \\ &= \|x\|_K^2 \end{aligned}$$

i.e S est une isométrie. Alors d'après le théorème précedent, on a donc

$$w_K(ST) \leq w_K(T).$$

Puisque ST est une dilatation de AB, alors

$$w(AB) \leq w_K(ST) \leq w_K(T).$$

De plus,

$$w_K(T) = \max\{w(B), w(DBD^{-1})\} = w(B).$$

■

Corollaire 4.1 *Soit A un opérateur normal de $\mathcal{L}(H)$ commute avec $B \in \mathcal{L}(H)$. Alors*

$$w(AB) \leq w(A)w(B).$$

Preuve. D'après le théorème de Fuglede ([14]), A doublement commute avec B, et comme A est normal, alors $\|A\| = w(A)$.
Donc par le théorème précedent

$$w(AB) \leq w(A)w(B).$$

■

Théorème 4.5 ([17]) *Soient $AB = BA$ et $A^2 = \alpha I$, tels que $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors*

$$w(AB) \leq w(B)\|A\|. \tag{4.6}$$

Preuve. Supposons que $\|A\| \leq 1$. Soit l'opérateur D définit par

$$D^2 = I + A^*A + A^{*2}A^2 + ... + (A^*)^nA^n + ...$$

On définit l'espace de Hilbert H_1 par $H_1 = H$ muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle_1 = \langle Dx, Dy\rangle$.
Soit $K = H_1 \oplus H_1 \oplus ...$, on définit les opérateurs S et T sur K par

$$S(x_1, x_2, ...) = (Ax_1, D^{-1}x_1, x_2, x_3, ...)$$

et

$$T(x_1, x_2, ...) = (Bx_1, D^{-1}BDx_2, D^{-1}BDx_3, ...).$$

Notons que $ST = TS$ et que $w_K(T) = w(B)$. Donc si $x = (x_1, x_2, ...)$, alors

$$\langle STx, x\rangle_K = \left\langle D^2ABx_1, x_1\right\rangle + \langle Bx_1, Dx_2\rangle + \langle BDx_2, x_3\rangle + ...$$

On choisissons $Dx_2 = (I - A^*A + (A^*)^2A^2 - (A^*)^3A^3 + ...)\,x_1$, on obtient

$$\left\langle [I + A^*A + A^{*2}A^2 + ...]ABx_1, x_1\right\rangle \leq \left\langle [I + A^*A + A^{*2}A^2 + ...]x_1, x_1\right\rangle.$$

Comme $A^2 = \alpha I$, alors $\left\langle [1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4 + ...]ABx_1, x_1\right\rangle \leq \left\langle [1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4 + ...]x_1, x_1\right\rangle$. ■

4.2 Inégalités pour un opérateur inversible

Théorème 4.6 ([11]) *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$ tels que B est inversible. Si $\|A-B\| \leq r$ pour $r > 0$, alors*

$$\|A\| \leq \|B^{-1}\|[w(B^*A) + \frac{1}{2r^2}]. \tag{4.7}$$

Preuve. On a

$$\|A - B\| \leq r \;\Rightarrow\; ||Ax - Bx||^2 \leq r^2,\ \forall x \in H, ||x|| = 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} \|Ax - Bx\|^2 &= \|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle Ax, Bx\rangle \\ &= \|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle (B^*A)x, x\rangle \\ &\leq r^2, \end{aligned}$$

donc

$$\|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 \leq 2\,\mathrm{Re}\,\langle (B^*A)x, x\rangle + r^2.$$

D'où

$$\|Ax\|^2 + \frac{\|x\|^2}{\|B^{-1}\|^2} \leq 2|\,\langle (B^*A)x, x\rangle\,| + r^2.$$

Prenant le supremum sur $x \in H, \|x\| = 1$, on obtient

$$\|A\|^2 + \frac{1}{\|B^{-1}\|^2} \leq 2w(B^*A) + r^2.$$

Par l'inégalité élémentaire $2ab \leq a^2 + b^2$, on obtient

$$2\|A\|\frac{1}{\|B^{-1}\|} \leq 2w(B^*A) + r^2,$$

d'où

$$\|A\| \leq \|B^{-1}\|[w(B^*A) + \frac{1}{2}r^2].$$

■

Remarque 4.1 *Si nous choisissons ci-dessus $B = \lambda I$, $\lambda \neq 0$, nous obtenons l'inégalité*

$$(0 \leq)\|A\| - w(A) \leq \frac{1}{2|\lambda|}r^2,$$

à condition que $\|A - \lambda I\| \leq r$.

En outre, si nous supposons que $B = \lambda A^*$, avec A inversible , on obtient

$$\|A\| \leq \|A^{-1}\|[w(A^2) + \frac{1}{2|\lambda|}r^2],$$

à condition que $\|A - \lambda A^*\| \leq r$, $\lambda \neq 0$.

Théorème 4.7 ([11]) *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Si B est inversible et $\|A-B\| \leq r$ pour $r>0$, alors*

$$(0 \leq)\|A\|\|B\| - w(B^*A) \leq \frac{1}{2}r^2 + \frac{\|B\|^2\|B^{-1}\|^2 - 1}{\|B^{-1}\|^2}. \tag{4.8}$$

Preuve. Pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle Ax, Bx\rangle &= \|Ax - Bx\|^2 \\ &\leq r^2. \end{aligned}$$

Alors

$$\|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 \leq 2\,\mathrm{Re}\,\langle Ax, Bx\rangle + r^2$$

pour tout $x \in H$, qui est clairement équivalent à

$$\|Ax\|^2 + \|B\|^2 \leq 2\,\mathrm{Re}\,\langle (B^*A)x, x\rangle + r^2 + \|B\|^2 - \|Bx\|^2.$$

Comme

$$\mathrm{Re}\,\langle (B^*A)x, x\rangle \leq |\,\langle (B^*A)x, x\rangle\,|, \;\; \|Bx\|^2 \geq \frac{1}{\|B^{-1}\|^2}\|x\|^2$$

et

$$\|Ax\|^2 + \|B\|^2 \geq 2\|B\|\|Ax\|$$

pour tout $x \in H$,alors

$$2\|B\|\|Ax\| \;\; \leq 2|\,\langle (B^*A)x, x\rangle\,| + r^2 + \frac{\|B\|^2\|B^{-1}\|^2 - 1}{\|B^{-1}\|^2}$$

pour tout $x \in H, \|x\| = 1$.
Prennas le supremum sur $x \in H, \|x\| = 1$, on obtient

$$\|B\|\|A\| \;\; - w(B^*A) \leq \frac{1}{2}r^2 + \frac{\|B\|^2\|B^{-1}\|^2 - 1}{2\|B^{-1}\|^2}.$$

On en déduit alors le résultat souhaité (4.8). ■

Remarque 4.2 *Si nous choisissons dans le théorème ci-dessus $B = \lambda A^*, \lambda \neq 0$, A inversible, on obtient*

$$(0 \leq)\|A\|^2 - w(A^2) \leq \frac{1}{2|\lambda|}r^2 + |\lambda|\frac{\|A\|^2\|A^{-1}\|^2 - 1}{2\|A^{-1}\|^2}$$

à condition que $\|A - \lambda A^*\| \leq r$.

Théorème 4.8 ([11]) *Soitent $A, B \in \mathcal{L}(H)$ tels que B est inversible. Si $\|A-B\| \leq r < \|B\|$ pour $r>0$, alors*

$$\|A\| \leq \frac{1}{\sqrt{\|B\|^2 - r^2}}\left(w(B^*A) + \frac{\|B\|^2\|B^{-1}\|^2 - 1}{2\|B^{-1}\|^2}\right). \tag{4.9}$$

Preuve. Pour $x \in H$ avec $||x|| = 1$, nous avons

$$||Ax - Bx||^2 \leq r^2.$$

Alors

$$\|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 \leq 2\,\mathrm{Re}\,\langle (B^*A)x, x\rangle + r^2,$$

identiquement, pour tout $x \in H$

$$\|Ax\|^2 + \|B\|^2 \leq 2\,\mathrm{Re}\,\langle (B^*A)x, x\rangle + r^2 + ||B||^2 - ||Bx||^2.$$

Comme

$$\mathrm{Re}\,\langle (B^*A)x, x\rangle \leq |\,\langle (B^*A)x, x\rangle\,| \text{ et } \|Ax\|^2 + \|B\|^2 - r^2 \geq 2\|Ax\|\sqrt{\|B\|^2 - r^2}$$

alors

$$2\|Ax\|\sqrt{\|B\|^2 - r^2} \leq 2|\,\langle (B^*A)x, x\rangle\,| + \|B\|^2 - ||Bx||^2.$$

Et comme

$$\|Bx\|^2 \geq \frac{1}{\|B^{-1}\|^2}\|x\|^2, x \in H$$

on obtient

$$2\|Ax\|\sqrt{\|B\|^2 - r^2} \leq 2|\,\langle (B^*A)x, x\rangle\,| + \frac{\|B\|^2\|B^{-1}\|^2 - 1}{\|B^{-1}\|^2}$$

pour $x \in H$, $||x|| = 1$.
Prenant le supremum sur $x \in H$, $||x|| = 1$, on en déduit l'inégalité souhaitée

$$\|A\| \leq \frac{1}{\sqrt{\|B\|^2 - r^2}}[w(B^*A) + \frac{\|B\|^2\|B^{-1}\|^2 - 1}{2\|B^{-1}\|^2}].$$

■

4.3 Quelques inégalités divers

Théorème 4.9 ([12]) *Pour tout $A, B \in \mathcal{L}(H)$ et $r \geq 1$, on a l'inégalité*

$$w^r(B^*A) \leq \frac{1}{2}\|(A^*A)^r + (B^*B)^r\|. \tag{4.10}$$

La constante $\frac{1}{2}$ est optimale.

Preuve. Par l'inégalité de Cauchy Schwartz nous avons pour tout $x \in H$

$$\begin{aligned} |\langle B^*Ax, x\rangle| &= |\langle Ax, Bx\rangle| \\ &\leq \|Ax\|\|Bx\| \\ &= \langle Ax, Ax\rangle^{\frac{1}{2}}\langle Bx, Bx\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= \langle A^*Ax, x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle B^*Bx, x\rangle^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité élémentaire, et la convexité de la fonction $f(t) = t^r$, $r \geq 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \langle A^*Ax, x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle B^*Bx, x\rangle^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{(\langle A^*Ax, x\rangle^{\frac{1}{2}})^2}{2} + \frac{(\langle B^*Bx, x\rangle^{\frac{1}{2}})^2}{2} \\ &= \frac{\langle A^*Ax, x\rangle + \langle B^*Bx, x\rangle}{2} \\ &\leq (\frac{\langle A^*Ax, x\rangle^r + \langle B^*Bx, x\rangle^r}{2})^{\frac{1}{r}}, \end{aligned}$$

pour tout $x \in H$.
D'après le lemme 1.4 pour tout $r \geq 1$ et $x \in H$ avec $\|x\| = 1$ on a

$$\begin{aligned} (\frac{\langle A^*Ax, x\rangle^r + \langle B^*Bx, x\rangle^r}{2})^{\frac{1}{r}} &\leq (\frac{\langle (A^*A)^r x, x\rangle + \langle (B^*B)^r x, x\rangle}{2})^{\frac{1}{r}} \\ &\leq (\frac{\langle [(A^*A)^r + (B^*B)^r]x, x\rangle}{2})^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant les trois dernières inégalités, nous obtenons l'inégalité

$$|\langle (B^*A)^r x, x\rangle|^r \leq \frac{1}{2}\langle [(A^*A)^r + (B^*B)^r]x, x\rangle$$

pour tout $x \in H, \|x\| = 1$.
En prenant le supremum sur $x \in H, \|x\| = 1$ dans l'inégalité précédente et comme l'opérateur $[(A^*A)^r + (B^*B)^r]$ est auto-adjoint, on en déduit l'inégalité souhaitée (4.10).
Pour $r = 1$ et $B = A$, nous obtenons des deux côtés de (4.10) la même quantité $\|A\|^2$ qui montre que la constante $\frac{1}{2}$ est optimale dans l'inégalité (4.10). ■

Corollaire 4.2 *Pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$ et $r \geq 1$, nous avons les inégalités*

$$w^r(A) \leq \frac{1}{2}\|(A^*A)^r + I\|,$$

et

$$w^r(A^2) \leq \frac{1}{2}\|(A^*A)^r + (AA^*)^r\|.$$

Théorème 4.10 ([12]) *Pour tout $A, B \in \mathcal{L}(H)$, tout $\alpha \in]0, 1[$ et $r \geq 1$, nous avons l'inégalité*

$$w^{2r}(B^*A) \leq \|\alpha(A^*A)^{\frac{r}{\alpha}} + (1-\alpha)(B^*B)^{\frac{r}{1-\alpha}}\|. \tag{4.11}$$

Preuve. Par l'inégalité de Cauchy Schwartz, nous avons

$$\begin{aligned}|\langle(B^*A)x,x\rangle|^2 &= |\langle Ax,Bx\rangle|^2 \leq \|Ax\|^2\|Bx\|^2\\ &= \langle Ax,Ax\rangle\langle Bx,Bx\rangle\\ &= \langle(A^*A)x,x\rangle\langle(B^*B)x,x\rangle\\ &= \langle[(A^*A)^{\frac{1}{\alpha}}]^{\alpha}x,x\rangle\langle[(B^*B)^{\frac{1}{1-\alpha}}]^{(1-\alpha)}x,x\rangle,\end{aligned}$$

pour tout $x \in H$.
D'après le lemme 1.4. Pour tout $\alpha \in]0,1[$ et tout $x \in H$, $\|x\| = 1$, on a

$$\langle[(A^*A)^{\frac{1}{\alpha}}]^{\alpha}x,x\rangle\langle[(B^*B)^{\frac{1}{1-\alpha}}]^{(1-\alpha)}x,x\rangle \leq \langle(A^*A)^{\frac{1}{\alpha}}x,x\rangle^{\alpha}\langle(B^*B)^{\frac{1}{1-\alpha}}x,x\rangle^{(1-\alpha)},$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique pour les moyennes pondérées (lemme 1.9), c'est à dire

$$a^{\alpha}b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b,\ \alpha \in]0,1[\text{ et } a,b \geq 0,$$

on a

$$\langle(A^*A)^{\frac{1}{\alpha}}x,x\rangle^{\alpha}\langle(B^*B)^{\frac{1}{1-\alpha}}x,x\rangle^{(1-\alpha)} \leq \alpha\langle(A^*A)^{\frac{1}{\alpha}}x,x\rangle + (1-\alpha)\langle(B^*B)^{\frac{1}{1-\alpha}}x,x\rangle$$

pour tout $x \in H, \|x\| = 1$.
De plus, par l'inégalité élémentaire pondérée en résulte de la convexité de la fonction $f(t) = t^r, r \geq 1$, que

$$\alpha a + (1-\alpha)b \leq (\alpha a^r + (1-\alpha)b^r)^{\frac{1}{r}}, \alpha \in (0,1), a,b \geq 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\alpha\langle(A^*A)^{\frac{1}{\alpha}}x,x\rangle + (1-\alpha)\langle(B^*B)^{\frac{1}{1-\alpha}}x,x\rangle &\leq [\alpha\langle(A^*A)^{\frac{1}{\alpha}}x,x\rangle^r + (1-\alpha)\langle(B^*B)^{\frac{1}{1-\alpha}}x,x\rangle^r]^{\frac{1}{r}}\\ &\leq [\alpha\langle(A^*A)^{\frac{r}{\alpha}}x,x\rangle + (1-\alpha)\langle(B^*B)^{\frac{r}{1-\alpha}}x,x\rangle]^{\frac{1}{r}},\end{aligned}$$

pour tout $x \in H, \|x\| = 1$.
Maintenant, en utilisant les quatres dernières inégalités, nous obtenons

$$|\langle(B^*A)x,x\rangle|^{2r} \leq \langle[\alpha(A^*A)^{\frac{r}{\alpha}} + (1-\alpha)(B^*B)^{\frac{r}{1-\alpha}}]x,x\rangle$$

pour tout $x \in H, \|x\| = 1$.
Prenant le supremum sur $x \in H, \|x\| = 1$, dans l'inégalité précédente on en deduit l'inégalité souhaitée (4.11). ■

Remarque 4.3 *Le cas particulier $\alpha = \frac{1}{2}$ donne l'inégalité*

$$w^{2r}(B^*A) \leq \frac{1}{2}\|(A^*A)^{2r} + (B^*B)^{2r}\|,$$

pour $r \geq 1$. *Notez que* $\frac{1}{2}$ *optimale dans la derniére inégalité puisque pour* $r = 1$ *et* $B = A$ *nous obtenons des deux côtés de cette dernière la même quantité* $\|A^4\|$.

Corollaire 4.3 *Pour tout* $A \in \mathcal{L}(H)$, $\alpha \in]0, 1[$ *et* $r \geq 1$, *nous avons les inégalités*

$$w^{2r}(A) \leq \|\alpha(A^*A)^{\frac{r}{\alpha}} + (1-\alpha)I\|$$

et

$$w^{2r}(A^2) \leq \|\alpha(A^*A)^{\frac{r}{\alpha}} + (1-\alpha)(A^*A)^{\frac{r}{1-\alpha}}\|. \tag{4.12}$$

Théorème 4.11 ([11]) *Soient* $A, B \in \mathcal{L}(H)$. *Alors si* $r > 0$ *et*

$$\|A - B\| \leq r,$$

alors

$$\|\frac{A^*A + B^*B}{2}\| \leq w(B^*A) + \frac{1}{2}r^2. \tag{4.13}$$

Preuve. Pour tout $x \in H$, $\|x\| = 1$, nous avons

$$\|Ax - Bx\|^2 \leq r^2 \ ,$$

ce qui implique

$$\|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 \leq 2\,\mathrm{Re}\langle Ax, Bx\rangle + r^2.$$

Comme

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 &= \langle Ax, Ax\rangle + \langle Bx, Bx\rangle \\ &= \langle A^*Ax, x\rangle + \langle B^*Bx, x\rangle \\ &= \langle (A^*A + B^*B)x, x\rangle, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\langle Ax, Bx\rangle &\leq |\langle Ax, Bx\rangle| \\ &= |\langle B^*Ax, x\rangle|. \end{aligned}$$

Alors on obtient

$$\langle (A^*A + B^*B)x, x\rangle \leq 2|\langle B^*Ax, x\rangle| + r^2$$

pour tout $x \in H$, $\|x\| = 1$. En prenant le supremum sur $x \in H$, $\|x\| = 1$ dans la dernière inégalité nous obtenons

$$w(A^*A + B^*B) \leq 2w(B^*A) + r^2.$$

Puisque l'opérateur $A^*A + B^*B$ est auto-adjoint alors

$$w(A^*A + B^*B) = \|A^*A + B^*B\|,$$

et par l'avant-derniére inégalité on en déduit l'inégalité souhaitée (4.13). ■

Théorème 4.12 ([11]) *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Alors*

$$\|\frac{A+B}{2}\|^2 \leq \frac{1}{2}[\|\frac{A^*A+B^*B}{2}\| + w(B^*A)]. \tag{4.14}$$

Preuve. Nous avons évidemment

$$\begin{aligned}
\|Ax+Bx\|^2 &= \|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle Ax, Bx\rangle \\
&= \langle Ax, Ax\rangle + \langle Bx, Bx\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle Ax, Bx\rangle \\
&= \langle A^*Ax, x\rangle + \langle B^*Bx, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle B^*Ax, x\rangle \\
&= \langle (A^*A + B^*B)x, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle B^*Ax, x\rangle \\
&\leq \langle (A^*A + B^*B)x, x\rangle + 2|\langle B^*Ax, x\rangle|
\end{aligned}$$

pour tout $x \in H$. En prenant le supremum sur $x \in H$, $\|x\| = 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|A+B\|^2 &\leq w(A^*A + B^*B) + 2w(B^*A) \\
&= \|A^*A + B^*B\| + 2w(B^*A),
\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{1}{4}[\|A+B\|^2] \leq \frac{1}{4}[\|A^*A + B^*B\| + 2w(B^*A)].$$

D'où

$$\|\frac{A+B}{2}\|^2 \leq \frac{1}{2}[\|\frac{A^*A+B^*B}{2}\| + w(B^*A)].$$

■

Théorème 4.13 ([11]) *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$ et $r \geq 1$. Si $A^*A \geq BB^*$ i.e $\|Ax\| \geq \|Bx\|$ pour tout $x \in H$, alors*

$$\|\frac{A^*A+BB^*}{2}\|^r \leq \|A\|^{r-1}\|B\|^{r-1}w(B^*A) + \frac{1}{2}r^2\|A\|^{2r-2}\|A-B\|^2. \tag{4.15}$$

Preuve. Nous utilisons l'inégalité suivante [16]

$$\|a\|^{2r} + \|b\|^{2r} \leq 2\|a\|^{r-1}\|b\|^{r-1}\,\mathrm{Re}\langle a, b\rangle + r^2\|a\|^{2r-2}\|a-b\|^2,$$

tels que : $r \geq 1$, $a, b \in H$ et $\|a\| \geq \|b\|$, nous obtenons

$$\|Ax\|^{2r} + \|Bx\|^{2r} \leq 2\|Ax\|^{r-1}\|Bx\|^{r-1}\,\mathrm{Re}\langle Ax, Bx\rangle + r^2\|Ax\|^{2r-2}\|Ax-Bx\|^2,\ \forall x \in H.$$

Comme $\mathrm{Re}\langle Ax, Bx\rangle \leq |\langle Ax, Bx\rangle|$, alors

$$\|Ax\|^{2r} + \|Bx\|^{2r} \leq 2\|Ax\|^{r-1}\|Bx\|^{r-1}|\langle Ax, Bx\rangle| + r^2\|Ax\|^{2r-2}\|Ax - Bx\|^2, \ \forall x \in H.$$

Comme dans la preuve du théorème 4.11, nous avons aussi

$$\|Ax\|^{2r} + \|Bx\|^{2r} \geq 2^{1-\frac{2r}{2}}(\langle (A^*A + B^*B)x, x\rangle)^{\frac{2r}{2}},$$

d'où

$$\|Ax\|^{2r} + \|Bx\|^{2r} \geq 2^{1-r}(\langle (A^*A + B^*B)x, x\rangle)^r, \ \forall x \in H.$$

Par conséquent, par les deux dernières inégalités nous obtenons, pour tout $x \in H$

$$\begin{aligned}(\langle (\frac{A^*A + B^*B}{2})x, x\rangle)^r &\leq \|Ax\|^{r-1}\|Bx\|^{r-1}|\langle Ax, Bx\rangle| + \frac{1}{2}r^2\|Ax\|^{2r-2}\|Ax - Bx\|^2 \\ &= \|Ax\|^{r-1}\|Bx\|^{r-1}|\langle B^*Ax, x\rangle| + \frac{1}{2}r^2\|Ax\|^{2r-2}\|Ax - Bx\|^2.\end{aligned}$$

En prenant le supremum sur $x \in H$, $\|x\| = 1$ dans l'inégalité précédente on en déduit l'inégalité souhaitée

$$\begin{aligned}\|\frac{A^*A + B^*B}{2}\|^r &\leq \|Ax\|^{r-1}\|Bx\|^{r-1}w(B^*A) + \frac{1}{2}r^2\|Ax\|^{2r-2}\|Ax - Bx\|^2 \\ &\leq \|A\|^{r-1}\|x\|^{r-1}\|B\|^{r-1}\|x\|^{r-1}w(B^*A) + \frac{1}{2}r^2\|A\|^{2r-2}\|x\|^{2r-2}\|A - B\|^2\|x\|^2,\end{aligned}$$

pour tout $x \in H, \|x\| = 1$.

D'où

$$\|\frac{A^*A + B^*B}{2}\|^r \leq \|A\|^{r-1}\|B\|^{r-1}w(B^*A) + \frac{1}{2}r^2\|A\|^{2r-2}\|A - B\|^2.$$

■

Remarque 4.4 *Soit $V \in \mathcal{L}(H)$ hyponormal. Si nous choisissons dans (4.15) $A = V$ et $B = V^*$, alors nous obtenons l'inégalité*

$$\|\frac{V^*V + VV^*}{2}\|^r \leq \|V\|^{2r-2}(w(V^2) + \frac{1}{2}r^2\|V - V^*\|^2),$$

pour tout $r \geq 1$.

En particulier, si $V = T$ un opérateur normal, alors nous déduisons pour $r = 1$ l'inégalité

$$\|T\|^2 \leq w(T^2) + \frac{1}{2}\|T - T^*\|^2.$$

Conclusion

Les inégalités en général jouent un rôle très important en tous les domaines des mathématiques, notre travail est consacré a l'étude des inégalités du rayon numérique d'un opérateur borné sur un espace de Hilbert. Ce domaine relie la théorie des opérateurs par les inégalités mathématiques qui ont connu une croissance exponentielle au cours des deux dernières décennies.
Dans ce travail on a essayé d'étudier se type d'inégalités dans plusieurs cas pour connaître tous ses aspects.
Dans notre travail on a recueilli, classé et expliqué, puis présenté des résultats établis par différents auteurs dans des articles datant à partir de 1965, concernant :

1. L'image et le rayon numériques, (travaux de P. R. Halmos et K.E. Gustafson).
2. Les inégalités de base pour un opérateur, (travaux de R. Bouldin, S. S. Dragomir et F. Kittaneh).
3. Les inégalités de base pour le produit de deux opérateurs, (travaux de J. A. R. Holbrook et K.E. Gustafson).
4. Les inégalités de puissance, (travaux de C. Berger et F. Kittaneh).
5. Les inégalités de deux opérateurs dont l'un des deux est inversible, (travail de S. S. Dragomir).
6. Les inégalités en sens inverse, (travaux de S. S. Dragomir).

Comme perspectives, nous intéressons de généraliser quelques inégalités et d'étudier la relation entre le rayon numérique d'un opérateur A et la norme de $\mathrm{Re}\,(A)$ et de $\mathrm{Im}\,(A)$.

Bibliographie

[1] C. Berger, *A strong dilatation theorem,* Notices Amer. Math. Soc. 12 (1965), 590.

[2] R. Bhatia, and F. Kittaneh, *Norm inequalities for positive operators*, Lett. Math. Phys. 43 (1998), 225-231.

[3] R. Bouldin, *The numerical range of a product*, J. Math. Appl. 32 (1970), 459-467.

[4] R. Bouldin, *The numerical range of a product. II*. J. Math. Anal.Appl. 33 (1971), 212-219.

[5] S. S. Dragomir, *Some refinements of Schwarz l'inequality*, Simpo-sional de Matematic¸si Aplica¸tii, Polytechnical Institute Timisoara, Ro-mania, 1-2 Nov., 1985, 13-16.

[6] S. S. Dragomir, and Sandro. J, *Some inequalities in prehilbertian spaces*, Studia Univ. "Babe,s-Bolyai"-Mathematica, 32(1) (1987), 71-78.

[7] S. S. Dragomir, *Some Grüss type inequalities in inner product spaces*, J. Ineq. Pure & Appl. Math., 4(2) (2003), Art. 42.

[8] S. S. Dragomir, *Reverse inequalities for the numerical radius of linear operators in Hilbert spaces,* Bull. Austral. Math. Soc., 73(2006),255-262.

[9] S. S. Dragomir, *A potpourri of Schwarz related inequalities in inner product spaces (II)*, J. Ineq. Pure & Appl. Math., 7(1) (2006), Art. 14.

[10] S. S. Dragomir, *Inequalities for the norm and the numerical radius of linear operators in Hilbert spaces*, Demonstratio Math. 40 (2007), No.2, 411–417.

[11] S. S. Dragomir, *Inequalities for the norm and the numerical radius of composite operators in Hilbert space, Inequalities and applications*, 135-146, Internat. Ser. Numer. Math., 157, Birkhauser, Basel, 2009.

[12] S. S. Dragomir, *Power inequalities for the numerical radius of a product of two operators in Hilbert spaces*. Sarajevo J. Math. 5(18) (2009), no. 2, 269-278.

[13] M. El-Haddad et F. Kittaneh, *Numerical radius inequalities for Hilbert space operators. II*, STUDIA MATHEMATICA 182 (2) (2007).

[14] B. A. Fuglede, *A commutativity theorem for normal operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 36 (1950), 35-40.

[15] T. Furuta, *Norm inequalities equivalent to Löwner-Heinz theorem*, Rev. Math. Phys. 1 (1989), 135-137.

[16] A. Goldstain, J.V. Ryff et L.E. Clarke, *Problem 5473*,Amer. Math. Monthly, 75(3) (1968), 309.

[17] K.E. Gustafson, D.K.M. Rao, *Numerical Range*, Springer-Verlag Inc., New York, 1997.

[18] P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, 2nd ed., Springer, New York, 1982.

[19] G. H. Hardy, J.E. littlewood, and G. Polya, *Inequalities*, 2nd ed., Cmbridge Univ. Press, Cambridge, 1988. M.

[20] F. Hausdorff, *Der Wertvorrat einer Bilinearform*, Math. Z. 3 (1919) 314-316.

[21] J. A. R. Holbrook, *Multiplicative properties of the numerical ra-dius in operator theory*, J. Reine Angew. Math.237 (1969), 166-174.

[22] F. Kittaneh, *Notes on some inequalities for Hilbert space operators*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 24 (1988), 283-293.

[23] F. Kittaneh, *Norm inequalities for sums of positive operators*, J. Operator Theory 48 (2002), 95-103.

[24] F. Kittaneh, *A numerical radius inequality and an estimate for the numerical radius of the Frobenius companion matrix*, STUDIA MATHEMATICA 158 (1) (2003).

[25] F. Kittaneh, *Numerical radius inequalities for Hilbert space operators*, ibid. 168 (2005), 73-80.

[26] F. D. Murnaghan, *On the field of values of a square matrix*, Proc. Natl. Acad. Sci. 18 (1932), 246-248.

[27] M. Schechter. *Principles of functional analysis*, The American Mather 1 artical Society, 2002.

[28] O. Toeplitz, *Das algebraische Analogon zu einem Staze von Fejér*, Math. Z. 2 (1918) 1877-197.